LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 15. Mai 2002

5. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 31. Mai 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Bitte beachten Sie die Verlegung der Diskussionsstunden am Donnerstag, 30. 5., auf den Freitag, 31. 5., 15:45–17:15 Uhr, Hörsaal SG 413.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte) Zeigen Sie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log(\log n)}$ ist divergent.

Aufgabe 2 (1+2+2+2+1 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $\int_1^7 \frac{1}{(5-x)^3}\,dx$

b) $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$

c) $\int_0^2 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{8/7}}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

e) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Beweisen Sie die LEGENDREsche Verdopplungsformel:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = 2^t\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) \quad \text{für } t > 0$$

und zeigen Sie, dass sie die Funktionalgleichung $f(t+1) = t f(t)$ erfüllt und logarithmisch konvex ist.

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+nx}$,

b) $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{nx+1}$,

c) $(h_n)_{n\geq 1}$ mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin(nx)}{n^2+x^2}$,

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte) Gegeben seien die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, die gleichmäßig gegen f bzw. g auf $D \subset \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie:

a) $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen $(f+g)$ auf D.

b) $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ ist i. A. nicht gleichmäßig konvergent auf D.

c) Ist $|f_n(x)| \leq M$ und $|g_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $M \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen $(f \cdot g)$.

Aufgabe 6 (3+2+4+2 Punkte, die nicht zur Gesamtpunktzahl mitzählen)
Es sei $I(n) := \int_0^{\pi/2} \sin^n u \, du$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:
$$I(0) = \frac{\pi}{2}, \quad I(1) = 1, \quad I(n+2) = \frac{n+1}{n+2} I(n), \, n \geq 0.$$

b) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung
$$1 \leq \frac{I(n)}{I(n+1)} \leq \frac{I(n)}{I(n+2)}.$$

c) Zeigen Sie, dass sich π als das folgende Produkt darstellen lässt (das so genannte Wallis-Produkt):
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2m+1} \frac{[(2m)!!]^2}{[(2m-1)!!]^2} \right).$$
Dabei sei für $m \in \mathbb{N}$
$$(2m)!! := 2 \cdot 4 \cdots (2m) \quad \text{und} \quad (2m+1)!! := 1 \cdot 3 \cdots (2m+1).$$
Hinweis. Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$
$$\frac{I(2m)}{I(2m+1)} = (2m+1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} \frac{\pi}{2}.$$

d) Zeigen Sie:
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte, die ebenfalls nicht zur Gesamtpunktzahl mitzählen)
Mit der Substitution $x^2 = t$ wurde die folgende Formel hergeleitet:
$$3 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \int_{-2}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_4^1 \frac{t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^1 = -\frac{7}{3}.$$
Wo ist der Fehler?