Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 12.07.2002

12. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 19.07.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie unter Verwendung der Poisson-Summationsformel:

$$\pi^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{4}(x+2\pi k)^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}e^{ikx} \quad (x\in\mathbb{R}),$$

$$\frac{4\pi\rho}{\omega_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+\rho^2[x+2k\pi]^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k|/\rho}e^{-ikx} \quad (x\in\mathbb{R},\ \rho>0),$$

$$\frac{-2}{\log r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x+2k\pi}{\log r}\right)^2} = p_r(x) \quad (x\in\mathbb{R},\ r\in(0,1)),$$

wobei p_r der Abel-Poisson-Kern ist (vgl. Übung 3, Aufgabe 1). $\boxed{16}$

Definition:

a) Eine Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt **lokal von beschränkter Variation auf** $\mathbb{R}$ *($g\in BV_{loc}(\mathbb{R})$), falls $g\in BV[\alpha,\beta]$ für alle $-\infty<\alpha<\beta<\infty$.*

b) Eine Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt **von beschränkter Variation auf** $\mathbb{R}$ *($g\in BV(\mathbb{R})$), falls $g\in BV_{loc}(\mathbb{R})$ und eine Konstante $M<\infty$ existiert, so dass $[Var\,g]_\alpha^\beta\le M$ für alle $-\infty<\alpha<\beta<\infty$.*

Aufgabe 2: Sei $g\in L^1(\mathbb{R})\cap BV(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) Die Reihe $2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x+2k\pi)$ $(=: g^*(x))$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a,b]\subset\mathbb{R}$, und $g^*\in BV_{loc}(\mathbb{R})$. $\boxed{10}$

b) Falls zusätzlich $g(x)=\frac{1}{2}(g(x+)+g(x-))$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt, so folgt

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x+2k\pi) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=-m}^{m} g^\wedge(k)e^{ikx} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

$\boxed{6}$

Hinweis: Folgerung I 51 und Lit. B VIII 2 (Achieser), p. 126 bzw. B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp. 124, 202

Aufgabe 3: Sei $\theta \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ eine gerade Funktion mit den Eigenschaften $\theta(0) = 1$, $(\theta(k/\rho))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ für ein $\rho > 0$ und $\theta^\wedge \in L^1(\mathbb{R})$. Für $f \in L^1_{2\pi}$ seien

$$C_\rho(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) e^{ikx},$$
$$U_\rho(f;x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) f^\wedge(k) e^{ikx} = (f * C_\rho)(x).$$

Man zeige $U_\rho(f;x) = \frac{1}{2\pi}(f * \chi_\rho)(x)$ f.ü., wobei $\chi_\rho(x) := \rho\,\theta^\wedge(\rho x)$, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) f^\wedge(k) e^{ikx} = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\theta^\wedge(\rho u)du \qquad (f.ü.).$$

Hinweis: Man benutze Satz I 23; siehe pp. 124-126 in F. Weisz:
θ-summation and Hardy spaces, J. Approx. Theory **107** (2000), 121-142. $\boxed{8}$

$\boxed{40}$