LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK Aachen, den 19.07.2002
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

13. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: bis zum 02.08.2002 im Sekretariat des Lehrstuhls)

Aufgabe 1: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $g^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie (vgl. Übung 4, Aufgabe 2 d)):

a) $(f * g)(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) g^\wedge(v) e^{ixv} dv \quad (x \in \mathbb{R}^n)$,

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\overline{g(u)} du = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(u)\overline{g^\wedge(u)} du$.

c) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so sind $f, f^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 2: Seien $f \in (L^1(\mathbb{R}))^{(r)}$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann $f * g \in (L^1(\mathbb{R}))^{(r)}$ ist mit (vgl. Übung 7, Aufgaben 4 und 5)

$$(f * g)^{(r)}(x) = (f^{(r)} * g)(x) \qquad \text{f.ü.}$$

$\boxed{6}$

Definition: *Eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ heißt* **quasikonvex**, *falls $f \in AC_{loc}(0, \infty)$ und $f' \in BV_{loc}(0, \infty)$, so dass (Riemann-Stieltjes-Integrale)*

$$\int_0^\infty u|d\, f'(u)| := \lim_{\varepsilon \to 0+,\, \rho \to \infty} \int_\varepsilon^\rho u|d\, f'(u)| := \lim_{\varepsilon \to 0+,\, \rho \to \infty} \int_\varepsilon^\rho u\, d[\mathit{Var}\, f']_\varepsilon^u < \infty.$$

Dabei ist (vgl. Definition II 32)

$$AC_{loc}(0,\infty) := \Big\{\varphi \in C(0,\infty) : \exists\, g \in L^1_{loc}(0,\infty) \text{ und } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ so dass } \varphi(x) = \alpha + \int_1^x g(u)du \quad \forall\, x \in (0,\infty)\Big\},$$

$$L^1_{loc}(0,\infty) := \{g : (0,\infty) \to \overline{\mathbb{C}} \text{ messbar und } \int_a^b |g(u)|du < \infty \quad \forall\, [a,b] \subset (0,\infty)\},$$

und $BV_{loc}(0, \infty)$ ist analog definiert (vgl. Definition von $BV_{loc}(\mathbb{R})$ in Übung 12).

Aufgabe 3: Sei $f \in C[0,\infty)$ quasikonvex und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie:

a) $\lim_{\rho\to\infty} \rho|f'(\rho)| = 0$,

b) $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2|f'(\varepsilon)| = 0$.

c) Falls f zusätzlich konvex ist, so folgt, dass f' monoton wachsend ist. $\boxed{5}$

Hinweis: B VIII 3 (Butzer-Nessel), p. 248

Aufgabe 4: Sei $f \in C_0(\mathbb{R})$ gerade und quasikonvex (auf $(0,\infty)$). Beweisen Sie, dass eine gerade Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit $g^\wedge(v) = f(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Dabei hat g für $x \neq 0$ die Darstellung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\sin\frac{xu}{2}}{x/2}\right]^2 d\,f'(u).$$

Ist f zusätzlich konvex, so ist g positiv.

Hinweis: B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp. 251-252 $\boxed{13}$

Definition: *Für $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > -1/2$, ist die ν-te* **Bessel-Funktion** *J_ν definiert durch*

$$J_\nu(t) = \frac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-it\cos\Theta}(\sin\Theta)^{2\nu}d\Theta.$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie die verschiedenen Darstellungen für $J_\nu(t)$:

a) $J_\nu(t) = \dfrac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^{(2\nu-1)/2}\,ds,$ $\boxed{2}$

b) $J_\nu(t) = \dfrac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2\displaystyle\int_0^1 \cos(ts)(1-s^2)^{(2\nu-1)/2}\,ds,$ $\boxed{2}$

c) $J_\nu(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{(t/2)^{\nu+2j}}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}.$ $\boxed{6}$

Hinweis: Darstellung c) ergibt sich aus b) unter Zuhilfenahme der Potenzreihendarstellung der cos-Funktion und der Identität

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du.$$

$\boxed{40}$