LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 10.05.2002

# 4. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 17.05.2002 vor der Übung)

**Aufgabe 1:** Sei $X$ ein Banach-Raum. Zeigen Sie, dass $[X]$ eine Banach-Algebra mit Einselement ist. $\boxed{10}$

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie:

a) Eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe ist die Fourier-Reihe ihrer Summe. $\boxed{2}$

b) Ist die Fourier-Reihe von $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert sie gegen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{2}$

c) Sei $f \in L^1_{2\pi}$ mit $f^\wedge \in \ell^1$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k) e^{ikx}.$$

$\boxed{2}$

d) Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ mit $g^\wedge \in \ell^1$ gilt

i) $(f * g)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k) g^\wedge(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}),$

ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\overline{g(u)}\, du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k)\overline{g^\wedge(k)},$

iii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{L^2_{2\pi}} = \|g^\wedge\|_{\ell^2}.$ $\boxed{5}$

**Aufgabe 3:**

a) Zeigen Sie: Für Funktionen $f, g \in L^2_{2\pi}$ gilt

$$(f * g)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k) g^\wedge(k) e^{ikx}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f, g \in L^2_{2\pi}$ das Produkt $f \cdot g \in L^1_{2\pi}$ ist und für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$[f \cdot g]^\wedge(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f^\wedge(j) g^\wedge(k-j) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{4}$

c) Für ein $\lambda > 0$ sei $f \in L^2(-\pi\lambda, \pi\lambda)$ eine $2\pi\lambda$-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f^\wedge(k)|^2 = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |f(u)|^2 du,$$

wobei hier $f^\wedge(k) := \dfrac{1}{2\pi\lambda} \displaystyle\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u) e^{-iku/\lambda} du \quad (k \in \mathbb{Z}).$ $\boxed{2}$

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Fejér-Kerns $F_m(x)$ aus Übung 2, Aufgabe 2b).

a) $(m+1)F_m(x) = \Big| \displaystyle\sum_{k=0}^{m} e^{ikx} \Big|^2.$ $\boxed{2}$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_m(x) \le m+1$ und

$$F_m(x) \le \begin{cases} \pi^2 m, & |x| \le 1/m \\ \frac{\pi^2}{(m+1)x^2}, & 1/m < |x| \le \pi \end{cases}.$$

$\boxed{2}$

c) Setzt man $F_m^*(x) := \dfrac{2\pi^2 m}{1 + m^2 x^2}$, dann gilt

$$F_m(x) \le F_m^*(x) \quad (\,|x| \le \pi\,), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} F_m^*(x)\, dx \le 2\pi^3 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$\boxed{4}$

d) $\Big| \displaystyle\sum_{k=-m}^{M} e^{ikx} \Big| \le \dfrac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \quad (\, x \ne 2\pi j,\ j \in \mathbb{Z},\ M \ge m\,).$ $\boxed{3}$

**Hinweis:** Man vergleiche die Aussage d) mit der Lösung zu Übung 3, Aufgabe 4a).

$\boxed{\boxed{40}}$