Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 31.05.2002

6. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 07.06.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Beweisen Sie:

a) Ist $f \in L^1_{2\pi}$ mit
$$\int_0^\pi \omega(t, f; L^1_{2\pi}) \frac{dt}{t} < \infty,$$
dann gilt:
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; x) = f(x) \quad f.ü.$$
Hinweis: Benutzen Sie das Dini-Kriterium für $\delta = \pi$. $\boxed{4}$

b) Ist $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L^1_{2\pi})$ für ein $\alpha > 0$, d.h. gilt $\omega(t, f; L^1_{2\pi}) = \mathcal{O}(t^\alpha)$ für $t \to 0+$ (vgl. Sie auch mit Folgerung I 48), dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; x) = f(x) \quad f.ü.$$
$\boxed{2}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie das **Gibbs-Phänomen**: Für den Bernoulli-Spline f_2 aus Übung 2 Aufgabe 4 b) und $x_n = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f_2; x_n) - f_2(x_n) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{\pi}{2} > 0.$$
$\boxed{3}$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Faltungsintegral $I_\rho f := f * \chi_\rho$ mit Kern $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$. Beweisen Sie (vgl. Lemma I 58):
$$\|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi} \|\chi_\rho\|_{L^1_{2\pi}} \qquad (\rho \in \mathbb{A}).$$
Hinweis: Lit. A II 22 (Lasser), pp. 109. $\boxed{5}$

Aufgabe 4: Für eine reellwertige Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ und $c \in \mathbb{R}$ sei $F_c(x) := \int_c^x f(t)dt$. Zeigen Sie, dass ein $c_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so das $\int_{-\pi}^{\pi} F_{c_0}(x)dx = 0$.

Hinweis: Mittelwertsatz $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Sei Λ eine komplexe, unendlich dimensionale Dreiecksmatrix, d.h. $\Lambda := (\lambda_{k,m})_{k,m\in\mathbb{P}}$ mit $\lambda_{k,m} \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda_{k,m} := 0$ im Falle $m < k$ ist. Für alle $m \in \mathbb{P}$ und $f \in L^1_{2\pi}$ sei $\Lambda_m f := f * \chi_m$ mit

$$\chi_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \lambda_{|k|,m} e^{ikx}.$$

a) Zeigen Sie die **Ungleichung von Hardy-Littlewood-Sidon**: Für $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ oder $L^1_{2\pi}$ existiert eine Konstante $M > 0$, so dass gilt:

$$\|\Lambda_m\|_{[X_{2\pi}]} \geq M \cdot \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{k,m}}{m+1-k} \right| \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Fejér-Polynome aus Übung 3, Aufgabe 4 b). $\boxed{4}$

b) Wenden Sie Teil a) auf die Fourier-Teilsummen an. $\boxed{1}$

Aufgabe 6: Die **de La Vallée Poussin-Summen** (de La Vallée Poussin: 1866–1962) einer Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ sind definiert durch das singuläre Integral

$$V_{m,\mu}(f;x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) v_{m,\mu}(u) du \qquad (0 \leq m \leq \mu \in \mathbb{N})$$

mit Kern

$$v_{m,\mu}(u) := \frac{\mu+1}{\mu+1-m} F_\mu(u) - \frac{m}{\mu+1-m} F_{m-1}(u),$$

wobei F_m der Fejér-Kern ist und $F_{-1} = 0$ gesetzt wird.

a) Bestimmen Sie die Faktoren $\Theta_{k,m,\mu}$ in der Darstellung

$$v_{m,\mu}(u) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} \Theta_{k,m,\mu} e^{iku}.$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie für festes $j \in \mathbb{P}$: $\|V_{\mu-j,\mu}\|_{[L^1_{2\pi}]} \neq \mathcal{O}(1) \quad (\mu \to \infty)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von Hardy-Littlewood-Sidon. $\boxed{4}$

Aufgabe 7: Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind die **Euler-Spines** $\varphi_{n,m}$ wie folgt definiert (vgl. Übung 2, Aufgabe 4 a)):

$$\varphi_{n,0}(t) := \operatorname{sgn}(\sin nt)$$
$$\varphi_{n,m}(t) := \int_{\gamma_{n,m}}^{t} \varphi_{n,m-1}(u) du \quad \text{mit} \quad \gamma_{n,m} = (1-(-1)^m)\frac{\pi}{4n}.$$

Zeigen Sie, dass die Euler-Splines 2π-periodische Funktionen sind und die folgenden Entwicklungen gelten

$$\varphi_{n,m}(t) = \frac{4}{\pi n^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)nt - \frac{\pi m}{2}\right]}{(2\nu+1)^{m+1}} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis die gliedweise Integration von Fourier-Reihen, d.h. für $f \in L^1_{2\pi}$ und $F(x) := \int_0^x f(u)\,du$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$F(x) = f^\wedge(0)x + \alpha + \sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{ik} f^\wedge(k) e^{ikx},$$

wobei die Reihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. $\boxed{9}$

Aufgabe 8: Zeigen Sie als Anwendung von Aufgabe 7:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$\boxed{6}$

$\boxed{45}$