Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 07.06.2002

7. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 14.06.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Die **periodischen Bernoulli-Splines** B_m sind definiert durch (vgl. Übung 2, Aufgabe 4 b))

$$B_1(t) := \begin{cases} \frac{\pi - t}{2}, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t = 0 \end{cases} \qquad (2\pi\text{-periodisch fortgesetzt}),$$

$$B_m(t) := \int_{\alpha_m}^{t} B_{m-1}(u)\, du \quad (t \in \mathbb{R},\ m \geq 2).$$

a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(\alpha_m)_{m=2}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass B_m eine 2π-periodische Funktion ist. $\boxed{3}$

b) Beweisen Sie die Fourier-Entwicklungen ($\nu \in \mathbb{N}$)

$$B_{2\nu}(t) = (-1)^{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{2\nu}}, \qquad B_{2\nu-1}(t) = (-1)^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{2\nu-1}}.$$

$\boxed{4}$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in Übung 6, Aufgabe 7.

Aufgabe 2: Sei $X_{2\pi}$ einer der Räume $C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, und sei $f \in X_{2\pi}$. Für eine approximierende Identität $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ gelte zusätzlich

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \left[\sup_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| \right] = 0.$$

Zeigen Sie:

a) In jedem Stetigkeitspunkt x_0 von f gilt $\lim_{\rho \to \rho_0} I_\rho(f; x_0) = f(x_0)$. $\boxed{3}$

b) Falls f stetig auf $(a - \eta, b + \eta)$ für ein $\eta > 0$ ist ($a < b$), dann gilt $\lim_{\rho \to \rho_0} I_\rho(f; x) = f(x)$ gleichmäßig in $[a, b]$. $\boxed{3}$

c) Falls $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ zusätzlich gerade ist und $\lim_{h \to 0+} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h)] = 2c$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, dann folgt $\lim_{\rho \to \rho_0} I_\rho(f; x_0) = c$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3:

a) Man zeige: Ist $f \in AC[a,b]$, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Wahl von disjunkten Intervallen $[a_i, b_i] \subset [a,b], i \in I \subset \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Hinweis: Man verwende die absolute Stetigkeit des Lebesgue-Integrals (vgl. Lit. B III 1 (Hewitt-Stromberg), p.286). $\boxed{2}$

b) Beweisen Sie für $b - a < \infty$:

$$AC[a,b] \subset BV[a,b].$$ $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien $f \in C_{2\pi}^{(r)}$ und $g \in L_{2\pi}^1$. Dann ist $f * g \in C_{2\pi}^{(r)}$ und $(f*g)^{(r)}(x) = (f^{(r)} * g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{5}$

b) Für eine approximierende Identität $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ und $f \in C_{2\pi}^{(r)}$ gilt (**simultane Approximation**)

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \|(I_\rho f)^{(k)} - f^{(k)}\|_{C_{2\pi}} = 0 \qquad (0 \leq k \leq r).$$ $\boxed{3}$

c) Falls $f \in (L_{2\pi}^p)^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, ist, so folgt $f' \in (L_{2\pi}^p)^{(r-1)}$, wobei $(L_{2\pi}^p)^{(0)} := L_{2\pi}^p$. $\boxed{2}$

d) Für $r, s \in \mathbb{N}$ und $1 < p < \infty$ seien $f \in (L_{2\pi}^p)^{(r)}$ und $g \in (L_{2\pi}^{p'})^{(s)}$, $1/p + 1/p' = 1$. Dann folgt $f * g \in C_{2\pi}^{(r+s)}$ und $(f*g)^{(r+s)}(x) = (f^{(r)} * g^{(s)})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{3}$

Definition: *Sei $f \in L_{2\pi}^p$, $1 \leq p < \infty$. Falls ein $g \in L_{2\pi}^p$ existiert, so dass*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right\|_{L_{2\pi}^p} = 0,$$

so heißt g die **starke Ableitung** *$D_s^1 f$ von f. Höhere starke Ableitungen $D_s^r f$ werden iterativ definiert über $D_s^{r+1} f := D_s^1(D_s^r f)$.*

Aufgabe 5:

a) Seien $f \in (L_{2\pi}^p)^{(r)}$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die r-te starke Ableitung (in $L_{2\pi}^p$) von f existiert mit $D_s^r f = f^{(r)}$. $\boxed{4}$

b) Seien $f \in (L_{2\pi}^p)^{(r)}$, $1 \leq p < \infty$, und $g \in L_{2\pi}^1$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Faltung $f * g$ dann r-fach stark differenzierbar ist mit $(D_s^r f) * g = D_s^r(f * g)$. $\boxed{3}$

Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.34

$\boxed{\boxed{41}}$