

## 12. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 16.07.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

**Aufgabe 1:** Seien  $\underline{X}$  ein topologischer Raum und  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ .

- $\underline{X}$  habe die Eigenschaft: Zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  und  $f(y) = 1$ . Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für  $\underline{X}$ ?
- $\underline{X}$  habe die Eigenschaft: Zu jedem  $x \in X$  und jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  mit  $x \notin A$  gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  und  $f|_A = 1$ . Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für  $\underline{X}$ ?
- $\underline{X}$  habe die Eigenschaft: Für je zwei abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subset X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f|_A = 0$  und  $f|_B = 1$ . Welche topologische Trennungseigenschaft folgt hieraus für  $\underline{X}$ ?

**Aufgabe 2:**

- Sei  $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung ( $d \in \mathbb{N}$ ). Zeigen Sie: Es gibt ein stetiges  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Z}^d$ .
- Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen (mit Beweis) für die Existenz einer stetigen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a_n) = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  an.

**Aufgabe 3:** Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge und

- $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A := \{B; B = \emptyset \text{ oder } A \subset B \subset X\}$  für eine nicht-leere Teilmenge  $A$  von  $X$ ,
  - $\mathcal{P}$  eine Partition von  $X$  und  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  die zugehörige Partitionstopologie auf  $X$ .
- Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(X, \mathcal{T})$  an und bestimmen Sie die Menge der Limiten.
  - Ist  $(X, \mathcal{T})$  folgenbestimmt?

**Aufgabe 4:** Sei  $(X, \mathcal{T})$  die **nested interval topology**, d.h.  $X = ]0, 1[$  und  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_n; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$  mit  $U_n := ]0, 1 - 1/n[$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Man zeige:

- $\mathcal{T}$  ist eine Topologie auf  $X$ .
- Jede offene Teilmenge von  $X$ , außer  $X$  selbst, ist quasi-kompakt.
- Keine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , außer  $\emptyset$ , ist quasi-kompakt.