LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. S. Walcher

Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 26.04.2001

2. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 03.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: (Ordnungstopologie)
Sei X sei eine nicht-leere Menge und $\prec$ eine binäre Relation auf X, so dass

(i) Für alle $x \in X$ gilt: $x \not\prec x$.

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt entweder $x \prec y$ oder $y \prec x$.

(iii) Für alle $x, y, z \in X$ gilt: Aus $x \prec y$ und $y \prec z$ folgt stets auch $x \prec z$.

Für $a, b \in X$ sei dann $]a, b[:= \{x \in X; a \prec x \prec b\} \subset X$ das **offene Intervall** mit linkem Endpunkt a und rechtem Endpunkt b in $(X, \prec)$. Eine Menge $U \subset X$ heiße nun offen, falls es zu jedem $u \in U$ ein offenes Intervall $]a, b[\subset X$ gibt mit $u \in]a, b[\subset U$. Zeigen Sie:

a) $\emptyset$ ist offen.

b) (i) Ist $U_i \subset X$ offen für alle $i \in I \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.
   (ii) Sind $U_1, U_2 \subset X$ offen, dann auch $U_1 \cap U_2$.

c) Sei speziell $X := \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \geq 2$ und $\prec$ die natürliche Ordnung auf X. Bildet das System der oben definierten offenen Mengen dann eine Topologie auf X?

d) Falls die Relation $\prec$ zusätzlich die Eigenschaft besitzt, dass es zu jedem $x \in X$ Elemente $y, z \in X$ gibt mit $x \prec y$ und $z \prec x$, so bildet das System der offenen Mengen eine Topologie für X.

Aufgabe 2: Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{P} \neq \emptyset$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ heißt eine **Partition** von X, wenn je zwei Elemente von $\mathcal{P}$ disjunkt sind und $\cup_{P \in \mathcal{P}} P = X$ gilt.

a) Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ auf X ist. Diese Topologie heißt **Partitionstopologie** (zur Partition $\mathcal{P}$). Welche Partitionen muss man betrachten, um die diskrete bzw. indiskrete Topologie auf X zu erhalten?

b) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

   (i) $\mathcal{T}$ stimmt mit der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X überein.

   (ii) Es gibt eine Partition $\mathcal{P}$ von X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Aufgabe 3*: Im $\mathbb{R}^2$ definiert man die obere Halbebene durch

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y \geq 0\}.$$

Für $r > 0$ und $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$K_r(x_0,y_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0,y_0) und Radius r.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{K_r(x,y) \; ; \; (x,y) \in H, 0 < r \leq y\} \cup \{K_r(x,r) \cup \{(x,0)\} \; ; \; x \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf H ist.

b) Skizzieren Sie einige offene Mengen in dieser Topologie.

c) Zeigen Sie, dass $(H,\mathcal{T})$ das erste, nicht aber das zweite, Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 4: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $A \subset X$ sei $\alpha(A) := \overset{\circ}{\overline{A}}$. Zeigen Sie:

a) Aus $A \subset B \subset X$ folgt $\alpha(A) \subset \alpha(B) = \alpha(\alpha(B))$.

b) Ist G offen und A dicht in X, so gilt $\overline{A \cap G} = \overline{G}$.

c) Ist G offen, so ist G genau dann dicht in X, wenn $\alpha(\mathcal{C}_X G) = \emptyset$.