

4. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 17.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Betrachten Sie den Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$.

a) Ist in diesem Raum das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt?

Hinweis: Siehe **Beispiel (2.16)** im Skript!

b) Gibt es eine Pseudometrik d auf \mathbb{R} derart, dass $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{cof}$ gilt? (Antwort mit Beweis!)

Aufgabe 2*: Sei Z eine nichtleere Menge und $X := Z^{\mathbb{N}} = \{(z_i)_{i \in \mathbb{N}} : z_i \in Z \forall i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Folgen in Z . Für $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}, w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ setze dann

$$d(z, w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z = w, \\ 2^{-j}, j := \min\{i \in \mathbb{N} : z_i \neq w_i\} & \text{falls } z \neq w. \end{cases}$$

Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf X , welche sogar die ultrametrische Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 3: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Durch $d' := \frac{d}{1+d}$ wird auf X eine Metrik definiert.

b) d und d' induzieren dieselbe Topologie, d.h. es gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

c) d und d' sind genau dann äquivalent, wenn d beschränkt ist.

Aufgabe 4:

a) Sei X eine nichtleere Menge und ρ eine Abbildung von $X \times X$ in \mathbb{R} . Setze für $x \in X, \varepsilon > 0$

$$S(x, \varepsilon) := \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{T}_\rho := \{G \subset X : \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } S(x, \varepsilon) \subset G\}$$

ist eine Topologie für X .

b) Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die Abbildungen

$$\rho_1(x, y) := x - y, \quad \rho_2(x, y) := xy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

die folgenden Fragen:

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $x \in S(x, \varepsilon)$?

(ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist $S(x, \varepsilon)$ offen in der in a) beschriebenen Topologie?

(iii) Ist das System $\{S(x, \varepsilon); x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ eine Subbasis (Basis) dieser Topologie?