Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 16. November 2000

Lösungsmethoden für Differentialgleichungen

Im Folgenden werden 10 verschiedene Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen (DGL's) vorgestellt. Die Methoden werden an je einem Beispiel erklärt. Zunächst wird der Typ des Beispiels verifiziert und dann die Lösung gemäß der Methode bestimmt. Hier geht es nur um die Gestalt der Lösungsfunktion, nicht aber um die Bestimmung des Lösungsintervalls. Da bei (fast) allen Lösungsmethoden formal gerechnet wird, muss die Richtigkeit des Ergebnisses überprüft werden (Probe!). Der Übersichtlichkeit halber wird meistens $y = y(x)$ und $y' = y'(x)$ verwendet. Zu den Typen, die nicht in der Übung waren, werden in den Diskussionsstunden Beispiele, falls erwünscht, vorgerechnet.

1 Separation (Trennung der Variablen)

Allgemeiner Typ: $\boxed{\text{M(x)N(y)+P(x)Q(y)y'=0}}$

1) Gegeben sei z. B. die DGL $x(y^2-1)+y(x^2-1)y'=0$ (vgl.Ü2 A1).

2) Verifizierung des Typs: $M(x)=x,\ N(y)=y^2-1,\ P(x)=x^2-1,\ Q(y)=y.$

3) Separation der Variablen:
Division durch $P(x)N(y)$. Ist dabei $P(x)=0$ oder $N(y)=0$, so sind die entsprechenden Werte für x bzw. y hier auszuschließen und später separat zu betrachten (vgl. 5)):

$$\begin{aligned}
\text{Neue Form:}\quad & \frac{M(x)}{P(x)}+\frac{Q(y)}{N(y)}y'=0.\\
\text{bzw.:}\quad & -f(x)+\frac{1}{g(y)}y'=0 \qquad \text{(vgl.Vorlesung).}\\
\text{Hier:}\quad & \frac{x}{x^2-1}+\frac{y}{y^2-1}y'=0 \quad (|x|,|y|\neq 1).
\end{aligned}$$

4) Integration: Übergang zu

$$\int -f(x)\,dx+\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx=C.$$

Substitution: $y(x)=v$ und Rücksubstitution $v=y$ liefert:

$$\int -f(x)\,dx+\int \frac{1}{g(y)}\,dy=C.$$

Hier:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx+\int \frac{y}{y^2-1}\,dy=C.$$

bzw.:

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=C.$$

5) Auflösen der integrierten Gleichung nach y: Hier (Lösungsintervall vgl. Ü2 A1):

$$y = \pm\sqrt{\frac{C'}{x^2-1}+1}.$$

Weitere Lösung: $y = \pm 1$ (unter 3) ausgeschlossen), durch Einsetzen in die DGL unter 1)

6) Probe: Differentiation der gefundenen Lösung; durch Einsetzen in die DGL Richtigkeit nachweisen.

2 Substitution

In der DGL $y' = f(x,y)$ substituiert man $z(x) = g(x,y)$, so dass eine DGL $z' = h(x,z)$ entsteht, die mit den anderen Methoden gelöst werden können.(siehe Eulersche DGL's, wahrscheinlich 7.Übung).
Beispiel 1: $y' = f(ax+by+c)$ führt mit der Substitution $z(x) = ax+by+c$ auf die DGL $z'(x) = a + bf(z(x))$ (dann ist **1** anwendbar).
Beispiel 2: $y' = F(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ mit $(|a|+|b|+|c|>0,\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0)$ führt bei geeigneter Substitution auf eine *DGL* vom Typ **1**.

3 Homogene DGL

Allgemeiner Typ: $\boxed{M(x,y)+N(x,y)y'=0}$
M und N seien homogen vom gleichen Grad. Dabei gilt die Definition
Def.: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $t > 0$ gilt

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y). \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

1) Gegeben sei z.B. die DGL $xy' = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y$.

2) Verifizierung des Typs: $M(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y$; $N(x,y) = -x$.

$$\text{Hier:}\quad \begin{aligned} M(tx,ty) &= t(x\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y) = tM(x,y),\\ N(tx,ty) &= -tx = tN(x,y), \end{aligned}$$

also sind M und N homogen vom Grad 1.

3) Überführung in DGL der Form $y' = g(y/x)$:

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(x,x\cdot(y/x))}{N(x,x\cdot(y/x))} = -\frac{x^\alpha M(1,y/x)}{x^\alpha N(1,y/x)} = -\frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)} = g(y/x).$$

$$\text{Hier:}\quad g(y/x) = -\frac{\sin(y/x)+y/x}{-1} = \sin(y/x) + y/x.$$

4) Substitution:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x};\quad y(x) = z(x)x;\quad y'(x) = z(x) + xz'(x),$$

liefert DGL vom Typ **1** in x und z: $g(z) = z + xz'$.
Hier: $-\sin(z) + xz' = 0$; (Einschränkungen bei der Separation: $x \neq 0$, $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

5) Weiter entsprechend **1** 2) - **1** 6)
Lösung des Beispiels:
$$y = 2x(\arctan(Cx) + k\pi) \quad (C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}).$$

<u>Bemerkung:</u> Die aus der Vorlesung bekannte Darstellung für die homogene Differentialgleichung

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

lässt sich durch Umformung auf die Gestalt

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{2}$$

bringen *und umgekehrt.* Setzt man nämlich

$$M(x,y) = x^\alpha F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{und} \qquad N(x,y) = -x^\alpha,$$

so sind die Funktionen M und N homogen vom Grad α und Einsetzen in (1) führt zu (2). Sind umgekehrt M und N homogen vom Grad α, so ist (2) äquivalent zu

$$x^\alpha \left(M\left(1, \frac{y}{x}\right) + N\left(1, \frac{y}{x}\right) y'\right) = 0.$$

Mit der Setzung

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)}$$

ergibt sich (1).

4 Lineare DGL (1. Ordnung)

<u>Allgemeiner Typ:</u> $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad y' = -y\varphi'(x) + \varphi(x)\varphi'(x)$.

2) Verifizierung des Typs: $\quad \alpha(x) = -\varphi'(x); \quad b(x) = \varphi(x)\varphi'(x)$.

3) Bestimmung einer *homogenen* Lösung nach Satz (1.8) XII:
$$\phi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right) \quad (x_0 \in I).$$
Hier:
$$\phi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x \varphi'(t)dt\right) = e^{-\varphi(x)} + c.$$

4) Bestimmung der Lösung (auch Satz (1.8) XII):
$$\psi(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\phi(t)}dt\right)\phi(x) \quad (y_0 \in \mathbb{R}),$$
$$\begin{aligned}\text{Hier:} \quad \psi(x) &= \left(C + \int_{x_0}^x \varphi(t)\varphi'(t)e^{\varphi(t)}dt\right) e^{-\varphi(x)} \\ &= \left(\varphi(x)e^{\varphi(x)} - \int_{x_0}^x \varphi'(x)e^{\varphi(x)}dt + C^*\right) \cdot e^{-\varphi(x)} \\ &= \left(\varphi(x)e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(x)} + C'\right) \cdot e^{-\varphi(x)} = \varphi(x) - 1 - C' \cdot e^{-\varphi(x)}.\end{aligned}$$

5) Probe: Wie unter **1** 6).

5 Bernoulli DGL

Allgemeiner Typ: $\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1,0\}; a, b \in C(I))$.
Benannt nach Johann I. Bernoulli (6.8.1667 Basel - 1.1.1748 Basel). Für weitere Voraussetzungen siehe auch Übung 4 Aufgabe 3 (In dieser Aufgabe wird allerdings nicht der allgemeinste Fall diskutiert. Für weitere Informationen siehe in der Literatur).

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad y' - xy^2 - 3xy = 0.$

2) Verifizierung des Typs: $\quad a(x) = -3x; \quad b(x) = -x, \quad \alpha = 2.$

3) Division durch $y^\alpha (y \neq 0$; überprüfe separat) liefert $\quad \frac{y'}{y^\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0.$

$$\text{Hier:} \quad \frac{y'}{y^2} - \frac{3x}{y} = x.$$

Substitution $u = y^{1-\alpha}$ liefert lineare DGL (Typ **4**):

$$\frac{u'}{1-\alpha} + a(x)u + b(x) = 0.$$

Hier: $\quad u' + 3xu = -x$ (da $1 - \alpha = -1$).
Weiterer Lösungsweg siehe **4**.
Allgemeine Lösung des Beispiels: $\quad y = \left(-\frac{1}{3} + ce^{-\frac{3}{2}x^2}\right)^{-1}.$

6 Riccati-DGL

Allgemeiner Typ: $\boxed{y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)}$ $(P, Q, R \in C(I), I$ Intervall).
Benannt nach Graf Jacopo Franceso Riccati (28.5.1676 Venedig – 15.4.1754 Treviso). Die allgemeine Lösung findet man, falls mindestens eine Lösung bekannt ist. Man unterscheidet 3 Fälle.
1. Fall: *Eine* Lösung ist bekannt

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad y' = y^2 - 3x^{-1}y + x^{-2}.$

2) Verifizierung des Typs: $\quad P(x) = 1; \quad Q(x) = -3x^{-1}, \quad R(x) = x^{-2}.$

3) Aufsuchen *einer* speziellen Lösung, z.B. durch den Ansatz $y_1(x) = kx^\alpha$ (hier: $y_1(x) = x^{-1}$).

4) Substitution $y = y_1 + z^{-1}$ führt auf eine lineare DGL **4**:

$$z' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))z = -P(x).$$

Hier:

$$z' - x^{-1}z = -1.$$

Weiterer Lösungsweg siehe **4**.
Allgemeine Lösung des Beispiels: $y(x) = \frac{c - \log x + 1}{x(c - \log x)}.$
2. Fall: *Zwei* Lösungen y_1, y_2 sind bekannt

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad y' = -y^2 - x^{-1}y + 4x^{-2}.$

2) Verifizierung des Typs: $\quad P(x) = -1; \quad Q(x) = -x^{-1}, \quad R(x) = 4x^{-2}.$

3) Aufsuchen zweier Lösungen; z.B. durch den Ansatz

$$y(x) = kx^{\alpha} \quad (\text{hier:} \quad y_1(x) = 2x^{-1}, y_2(x) = -2x^{-1}).$$

4) Substitution $y = y_1 + z^{-1}$ führt auf die lineare DGL **4**

$$z' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))z = -P(x) \quad (\text{hier:} \quad z' - 5x^{-1}z = 1).$$

mit der partikulären Lösung $z_p = (y_2 - y_1)^{-1}$. Dann ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \\ z(x) &= \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + C \exp\left(-\int \{2P(x)y_1(x) + Q(x)\}dx\right). \end{aligned}$$

$$\left(\text{Hier}: z(x) = Cx^5 - x/4, \quad y(x) = \frac{8cx^4 + 2}{4cx^5 - x}\right).$$

<u>3. Fall:</u> *Drei* Lösungen y_1, y_2, y_3 sind bekannt. Die allgemeine Lösung y ist gegeben durch

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C.$$

7 Clairautsche DGL

<u>Allgemeiner Typ:</u> $\boxed{y = xy' + f(y')}$

Benannt nach Alexis Claude Clairaut (7.5.1713 Paris - 17.5.1765 Paris).

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad y = xy' + (y')^2$.

2) Verifizierung des Typs: $f(t) = t^2$.

3) Differenzieren: $\quad y' = xy'' + y' + f'(y')y''$.
Daraus folgt $\quad 0 = y''(x + f'(y')) \quad$ (hier: $0 = y''(x + 2y')$).

4) Lösung der Gleichung ergibt eine explizite Lösungsschar:
$y'' = 0$, also $y' = c$ und schließlich, da $y(0) = f(y'(0)) = f(c)$, folgt $y = cx + f(c) \quad$ (hier: $y = cx + c^2$).

5) Weitere Lösungen sind implizit gegeben durch

$$x + f'(y') = 0 \quad (\text{hier}: \quad x + 2y' = 0).$$

Auflösen nach y' ergibt weitere Lösungen $\quad$ (hier: $y' = -x/2; y = -x^2/4$, da $y(0) = f(0)$).

6) Probe!

8 Exakte DGL

Allgemeiner Typ: $\boxed{g(x,y) + h(x,y)y' = 0}$
mit $g, h \in C^{(1)}(I)$, I ein Quader im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Ü3 A2). Die DGL ist *exakt*, falls das zugehörige Vektorfeld (g, h) ein Potential F hat, also es eine Funktion F gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = h.$$

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad x + 3y^2y' = 0.$

2) Verifizierung des Typs:
   DGL ist exakt genau dann, wenn $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ auf I.
   Hier: $\quad g(x,y) = x, h(x,y) = 3y^2$, also $\partial g/\partial y = 0 = \partial h/\partial x.$

3) Bestimmung von $F(x,y)$ nach der Formel (vgl. Ü3, A1)

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} h(x_0,t)dt + c, \quad ((x_0,y_0) \in I).$$

   Hier: $F(x,y) = x^2/2 + y^3 + c.$

4) Lösung der DGL ist gegeben durch $F(x,y) = C$.
   hier: $x^2/2 + y^3 = C'$.

5) Auflösen nach y.
   Hier: $y(x) = (C' - x^2/2)^{1/3}$.

6) Probe!

9 Integrierender Faktor

Allgemeiner Typ: $\boxed{g(x,y) + h(x,y)y' = 0}$
mit $g, h \in C^{(1)}(I)$, I ein Quader in $\mathbb{R}^2$.
Eine auf I nicht verschwindende Funktion $M(x,y)$ heißt *integrierender Faktor*, falls die DGL

$$\mu(x,y)g(x,y) + \mu(x,y)h(x,y)y' = 0$$

exakt ist (vgl.Ü3, A4).

1) Gegeben sei z.B. die DGL $\quad x^2 + y - xy' = 0.$

2) Verifizierung des Typs: $\quad g(x,y) = x^2 + y, \quad h(x,y) = -x$ (vgl. **8** 2): DGL nicht exakt).

3) Berechnung des integrierenden Faktors:

   (a) Sei $u(x) = (g_y - h_x)/h$, $h \neq 0$ auf I, so dass u nicht von y abhängt, so ist $M(x) = \exp(\int_c^x u(t)dt)$ ein integrierender Faktor.

   (b) Sei $u(y) = (g_y - h_x)/g$, $g \neq 0$ auf I, so dass u nicht von x abhängt, so ist $M(y) = \exp(-\int_c^y u(t)dt)$ ein integrierender Faktor.
   Hier: $\quad (g_y - h_x)/g = 2/x$; somit ist $M(x) = 1/x^2$ ein integrierender Faktor.

Es kann sein, dass ein integrierender Faktor existiert, obwohl er sich mit diesen beiden Methoden nicht berechnen lässt.

4) Multiplikation der DGL mit M führt auf eine exakte DGL:

$$\text{hier:} \quad 1 + \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} = 0 \quad \text{ist exakt.}$$

5) Bestimme Lösung nach **8** 3) - **8** 5).
   Hier: $y(x) = x^2 + cx$.

6) Probe!

10 Potenzreihenansatz

Setze in der DGL $y' = f(x,y)$ für y eine Potenzreihe ein (allgemeiner siehe auch Ü5 A3):

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

und setze diese Potzenreihe in die DGL ein. Als Resultat erhält man mittels Koeffizientenvergleichs eine Rekursionsformel für die $a_k's$. Ist eine Anfangsbedingung gegeben, so lassen sich die $a_k's$ u.U. explizit berechnen. Durch Vergleich mit bekannten Potenzreihen erhält man die Lösungsfunktion gegebenenfalls auch in geschlossener Form. Die Konvergenz der Lösungsreihe ist i.A. noch zu zeigen (siehe Ü5 A3). Für Beispiele siehe Vorlesung oder Übung 6.