Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 22. Oktober 2001

2. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 29.10.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2 Punkte): Seien K und M_i, $i \in \mathbb{N}$ Mengen. Zeigen Sie folgende Versionen der Regeln von de Morgan:

a) $K \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (K \setminus M_i)$

b) $K \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (K \setminus M_i)$

Aufgabe (4 Punkte): Seien M_i, $i \in \mathbb{N}$ beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i \right) = M_1$$

Aufgabe (4 Punkte): Sei M eine endliche Menge der Mächtigkeit $\#M = n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$\#\mathcal{P}(M) = 2^n.$$

Aufgabe (2+2+4 Punkte): Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$,

c) $\dfrac{4^n}{2n+1} < \dbinom{2n}{n} < 4^n$.

Aufgabe (3+3 Punkte): Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

a) $3^n \geq 3n^2$,

b) $\dfrac{n^3}{3} > 3n - 3$?

Aufgabe (5 Punkte): Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$b^n - a^n = (b-a) \sum_{j=0}^{n-1} b^j a^{n-1-j}.$$