LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 29. Oktober 2001

3. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 5.11.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Anmerkungen. Die korrigierten Übungen, die mittwochs und donnerstags in der Übung nicht abgeholt werden, liegen hinter der Eingangstür zu den Räumen 243–248 im Hauptgebäude (eine Etage über dem Sekretariat des Lehrstuhls A für Mathematik). Dort gibt es auch noch Übungsblätter. Weiterhin sind die Übungsblätter auch im Internet unter `http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/WS01/Ana1/` erhältlich.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):

a) Beweisen Sie: Für alle $k,n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Hinweis: Formen Sie den Summanden $k\binom{n}{k}$ so um, dass der Binomische Lehrsatz anwendbar wird.

Aufgabe 2 (2+3+1 Punkte): Für Mengen $M,N \subset \mathbb{R}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ seien $M+N$ und aM definiert durch

$$M+N := \{x;\, x = m+n \text{ mit } m \in M, n \in N\} \text{ und}$$
$$aM := \{x;\, x = am \text{ mit } m \in M\}.$$

Seien $M,N \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach unten beschränkte Mengen. Beweisen Sie:

a) $\inf(M+N) = \inf M + \inf N$.

b) Mit $a > 0$ gilt $\inf(aN) = a \inf N$.

c) Die Aussage von b) ist im Allgemeinen falsch, wenn $a < 0$ ist. (Gegenbeispiel!)

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte): Seien a,b,c,d,x_i $(i = 1,\ldots,n)$ Elemente eines angeordneten Körpers K. Begründen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen jeden Ihrer Schritte mit den in der Vorlesung kennen gelernten Eigenschaften der Ordnung und des Betrages.

a) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

b) Zeigen Sie:

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2\,, \quad \text{wobei } a \neq 0, b \neq 0.$$

c) Seien $b > 0$, $d > 0$ und gelte $a/b < c/d$, dann zeige man:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aufgabe 4 (1+1+1 Punkte): Geben Sie für folgende Mengen obere und untere Schranken, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (falls diese existieren) an – ohne Beweis:

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}; 1 < x^2 < 5\}$$
$$M_2 := \{x \in \mathbb{R}; x > 0, x^2 > 8\}$$
$$M_3 := \{x \in \mathbb{R}; 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$$