LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 12. November 2001

# 5. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 19.11.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

**Aufgabe 1** (3 Punkte) Seien $X, Y$ nichtleere Mengen. Charakterisieren Sie alle Teilmengen von $X \times Y$, die als Graphen von Abbildungen $f : X \to Y$ auftreten.

**Aufgabe 2** (1+1+2+2 Punkte) Untersuchen Sie, ob durch die folgendenen Zuordnungsvorschriften Abbildungen definiert sind, und zeigen oder widerlegen Sie gegebenenfalls die Injektivität und Surjektivität der Abbildungen.

a) $f : \mathbb{R} \to \{0,1\},\ f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$

b) $f : \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq x \leq 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = y$ mit $x^2 + y^2 = 1$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$

d) $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z+z_0}{z-z_0}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ sei.

**Aufgabe 3** (6 Punkte) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch $f$.

b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch $g$.

c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch $f$.

d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch $g$.

**Aufgabe 4** (5 Punkte) Zeigen Sie: Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar und die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

**Aufgabe 5** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, (m,n) \mapsto 2^m(2n+1).$$

**Aufgabe 6** (5 Punkte) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $f$ ist injektiv,

(2) es existiert $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$,

(3) für alle $A \subset X$ ist $f^{-1}(f(A)) = A$,

(4) für alle $A_1, A_2 \subset X$ ist $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.