LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 21. Januar 2002

13. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 28. Januar 2002, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cosh(z) = \tfrac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) \text{ und } \sinh(z) = \tfrac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

b) Zeigen Sie: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \text{ und} \\ \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) \end{aligned}$$

sowie

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

c) Zeigen Sie, dass $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv sind. Zeigen Sie weiter, dass die Umkehrfunktionen

$$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty) \text{ und } \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton steigend sind. Sie können hier voraussetzen, dass $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv sind.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel einer streng monotonen, stetigen Funktion an, deren Umkehrfunktion unstetig ist.

b) Geben Sie ein Beispiel einer umkehrbaren, stetigen Funktion an, die nicht streng monoton ist.

c) Geben Sie ein Intervall E und eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ an, die auf E streng monoton und unstetig ist, so dass f^{-1} stetig auf $f(E)$ ist.

Aufgabe 3 (2+1+2+2+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte bzw. zeigen Sie gegebenenfalls, dass sie nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[x + \frac{1}{2}\right]}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ und $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}\right)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Geben Sie die Art der Unstetigkeitsstelle in $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen an:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x)$,

b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/|x|)$ und

c) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x - [x]}{x}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, ist die Menge

$$X_a := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a^{n+1}}, \frac{1}{a^{n-1}} \right]$$

kompakt?

Aufgabe 6 (3 Punkte) Sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in K$. Zeigen Sie, dass dann ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq \alpha$ für alle $x \in K$.