LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 28. Januar 2002

14. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 4. Februar 2002, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte) Sei $D = (a,b)$ mit $a < b$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ($a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

a) Ist f gleichmäßig stetig und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in D, so ist auch $(f(x_n))_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge.

b) Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$) und $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$) existieren, so ist f gleichmäßig stetig.

c) Im Fall $-\infty < a < b < \infty$ gilt in b) auch die Umkehrung.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte) Zeigen Sie:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $1 + x \leq \exp(x)$.

b) Folgern Sie aus a) und der Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$n\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq \log(x) \leq n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad \text{für } x \in (0,\infty) \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass dann $f(A)$ beschränkt ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei f auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ stetig und gelte $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie: Es existiert mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\exp(1/x) = x$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ hat.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $4\cos(x) = x$ mindestens zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 6 (1+2+2 Punkte) Zeigen Sie:

a) Für $x, y, x+y \in \mathbb{R}\setminus\{(k+\frac{1}{2})\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.$$

b) Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1), x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ist streng monoton und bijektiv.

c) Für die Umkehrfunktion artanh von tanh gilt für $x \in (-1,1)$:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Bestimmen Sie analoge Darstellungen von arcosh und arsinh auf den jeweiligen Definitionsbereichen (vgl. Übung 13, Aufgabe 1).