4.3.3 Trigonometrische Funktionen

In einem rechtwinkligen ξ-η-Koordinatensystem betrachten wir den Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, den man durch die Gleichung $\xi^2+\eta^2=1$ beschreiben kann. Der Umfang dieses Kreises beträgt bekanntlich 2π mit $\pi = 3,14151\ldots$ Tragen wir vom Nullpunkt aus gegen dei ξ-Achse einen Winkel der Größe $\alpha°$ ab, so wird dadurch auf dem Kreis ein Bogen mit einer bestimmten Länge x definiert. Der Zusammenhang zwischen α und der Bogenlänge x ist gegeben durch

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{x}{2\pi}\,. \tag{30}$$

Die Größe des Winkels kann deshalb durch α oder durch x beschrieben werden. α heißt das Gradmaß des Winkels, auf Taschenrechnern meist mit DEG (= degree) bezeichnet, und x heißt das Bogenmaß des Winkels, auf Taschenrechnern meist mit RAD (= radiant) bezeichnet. x wird positiv genommen, wenn der Winkel durch Drehung im Gegenuhrzeigersinn erzeugt wird, im anderen Fall wird x negativ genommen. Aus Gleichung (30) erhält man folgende Umrechnungstabelle zwischen Grad- und Bogenmaß:

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$

Im Folgenden verwenden wir ausschließlich das Bogenmaß.

Betrachten wir jetzt einen Winkel mit Bogenmaß x, so wird dadurch ein Punkt $P = (\xi,\eta)$ auf dem Einheitskreis erzeugt. Man definiert nun die Kosinus und Sinusfunktion durch

$$\xi = \cos x, \qquad \eta = \sin x.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck OAP gilt wegen $\overline{OP}=1$

$$\cos x = \overline{OA} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\sin x = \overline{AP} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Unser Definitionen von cos und sin stimmen also für Winkel $< \frac{\pi}{2} = 90°$ mit denen aus der Elementargeometrie überein.

Aus der Skizze ergeben sich folgende Eigenschaften für $x,y\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&\cos(x+k\cdot 2\pi) = \cos x, && \sin(x+k\cdot 2\pi) = \sin x\\
&\cos(-x) = \cos x, && \sin(-x) = -\sin x\\
&\cos(x+\pi) = -\cos x, && \sin(x+\pi) = -\sin x\\
&\cos x = 0 \iff x = \tfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi, && \sin x = 0 \iff x = k\cdot\pi\\
&\cos x = 1 \iff x = k\cdot 2\pi, && \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\\
&\cos x = -1 \iff x = \pi+k\cdot 2\pi, && \sin x = -1 \iff x = -\tfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\\
&\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin x, && \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos x
\end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Wegen der ersten Eigenschaft bezeichnet man cos und sin auch als periodische Funktionen mit der Periodenlänge 2π oder kurz als 2π-periodische Funktionen. Weiter gelten die so genannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x siny,\\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x siny,\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \sin y\cos x,\\ \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \sin y\cos x.\end{aligned}$$

Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $W(\cos) = W(\sin) = [-1, 1]$. Beide Funktionen sind außerdem für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Schließlich hat man noch die Darstellung als unendliche Reihe, nämlich

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Weiter definiert man die *Tangens-* und *Kotangensfunktion* durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$\tan x$ ist definiert für alle $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und $\cot x$ ist definiert für alle $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Beide Funktionen sind auf ihren Definitionsbereichen stetig und sind periodisch mit der Periodenlänge π, also

$$\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x, \quad \cot(x + k \cdot \pi) = \cot x \qquad (x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}).$$

Für die Ableitung erhält man mit der Quotientenregel (vgl. Satz 4.30):

$$\begin{aligned}\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\\ \cot' x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x\end{aligned}$$

4.3.4 Arcusfunktionen

Betrachtet man die trigonometrischen Funktionen auf einem Intervall, auf dem sie streng monoton sind, dann existiert dort eine Umkehrfunktion, die so genannte *Arcusfunktion* dieser trigonometrischen Funktion.

Als Beispiel untersuchen wir die Tangensfunktion auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, d. h. $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Wegen $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ ist tan ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Nach Satz 4.24 existiert eine stetige Umkehrfunktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertebereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Diese Funktion bezeichnet man als *Arcustangensfunktion*, abgekürzt als arctan. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt (vgl. Folgerung 4.8)

$$\begin{aligned} \tan(\arctan x) &= x, \qquad && (x \in \mathbb{R}), \\ \arctan(\tan x) &= x, \qquad && \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big). \end{aligned}$$

Die Ableitung kann man wieder mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 4.34) berechnen. Setzt man $x = \tan t$, dann folgt

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' t} == \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ausgehend von cos, sin und cot kann man in ähnlicher Weise arccos, arcsin und arccot definieren.

Anwendung

Höhenwachstum bei Fichten: Das Höhenwachstum bei Fichten kann man durch die Funktion

$$h(t) = 20\Big(1 + \arctan\frac{t - 30}{20}\Big) \qquad (t \geq 0)$$

beschreiben, wobei die Zeit t in Jahren und die Höhe $h(t)$ in Metern gemessen wird. Wie hoch werden Fichten nach diesem Modell maximal und in welchem Alter wachsen sie am schnellsten?

Zur Beantwortung der ersten Frage betrachten wir $\lim_{t\to\infty} h(t)$. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 20\Big(1 + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \arctan\frac{t-30}{20}}_{\frac{\pi}{2}}\Big) = 20\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big) \approx 51,4\,(m),$$

wobei wir $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ benutzt haben. Fichten erreichen also (nach diesem Modell) im hohen Alter eine Höhe von maximal $51,4\,m$.

Da die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Ableitung h' gegeben ist, berechnen wir zunächst die Ableitung

$$h'(t) = 20\frac{1}{1 + \big(\frac{t-30}{20}\big)^2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{1 + \big(\frac{t-30}{20}\big)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn der Nenner den kleinsten Wert annimmt. Dies ist aber gerade für $\big(\frac{t-30}{20}\big)^2 = 0$, also für $t = 30$ der Fall. Demnach wachsen Fichten im Alter von 30 Jahren am schnellsten. Wegen $h'(30) = 1$ beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Alter $1\frac{m}{Jahr}$.

Natürlich lässt sich das Maximum von h' auch mit Hilfe der Differentialrechnung durch Berechnen der zweiten und dritten Ableitung bestimmen. Dies erfordert aber einen viel größeren Rechenaufwand.

4.4 Die Regeln von de l'Hospital

Bei der Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ etwa für $x \to a$, versucht man zunächst den Grenzwert mittels Satz 4.15 d) durch

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$$

zu berechnen. Diese Methode versagt insbesondere dann, wenn die Grenzwerte im Zähler und Nenner beide $\pm\infty$ oder beide 0 sind. In diesen Fällen können die so genannten *Regeln von de l'Hospital* weiterhelfen.

Satz 4.51. *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ferner seien $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt:*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung 4.52. Ein entsprechender Satz gilt für die Grenzwerte $\lim_{x\to b-}$ und $\lim_{x\to c}$ für ein $c \in (a, b)$.

Beispiele 4.53. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$ und nach den Regeln von l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$

Wegen $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 1 - 1 = 0$ und $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ erhält man mit l'Hospital und Teil a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}.$$

c) Sei $\alpha > 0$. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} =?$

Es gilt $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. Deshalb ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log' x}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede Potenz von x.

In den folgenden Beispielen muss man den zu untersuchenden Ausdruck erst in einen Quotienten umschreiben, bevor man die Regeln von de l'Hospital anwenden kann.

d) Sei $\alpha > 0$. $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = ?$

Wir schreiben den Ausdruck um zu

$$x^\alpha \log x = \frac{\log x}{x^{-\alpha}}.$$

Jetzt gilt $\lim_{x\to 0+} x^{-\alpha} = \infty$ und wir können l'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} = \frac{\log' x}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0.$$

e) $\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$

Für $x > 1$ gilt:

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \exp\left\{\frac{1}{x-1} \cdot \log x\right\} = \exp\left\{\frac{\log x}{x-1}\right\}.$$

Für den Ausdruck in den geschweiften Klammern gilt nach de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^{-1}}{1} = 1,$$

und wir erhalten aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1+} \exp\left\{\frac{\log x}{x-1}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x-1}\right\} = e^1 = e.$$

Die Ableitungen der elementaren Funktionen[2]

$f(x)$	$f'(x)$	Differenzierbar-keitsbereich
1	0	$(-\infty,\infty)$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	nx^{n-1}	$(-\infty,\infty)$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$
e^x	e^x	$(-\infty,\infty)$
$a^x,\ a>0$	$a^x\log a$	$(-\infty,\infty)$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$
$\log_a x,\ a\neq 1$	$\frac{1}{x\log a}=\frac{1}{x}\log_a e$	$(0,\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty,\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty,\infty)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-1-\cot^2 x$	$x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,\infty)$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,\infty)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$(-\infty,\infty)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$(-\infty,\infty)$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$	$(-\infty,\infty)$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$	$x\neq 0$

[2] Der Vollständigkeit halber wurden auch einige Funktionen aufgenommen, die im Text nicht behandelt werden.