

12. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 28.1.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1: Geben Sie den Definitionsbereich D der folgenden Funktionen an und differenzieren Sie diese:

- i) $(\ln(1-x)) \cos(2x)$; ii) $19^{\cos x}$ iii) $\frac{\cos t^2 x}{1 - \sin x}$;
iv)* $(\sin x)(1 + e^{2x})$; v)* $x e^{2t \cos x}$; vi) $\sqrt{\cos x}$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3 e^{\frac{-x}{10}} \cos x$ mit $x > 0$ unter folgenden Gesichtspunkten:

- i) Definitionsbereich D ;
- ii) Grenzwerte an den Rändern von D ;
- iii) Nullstellen;
- iv) Monotonieintervalle, relative und absolute Extrema.

Fertigen Sie anhand obiger Erkenntnisse eine Skizze der Funktion an.

Aufgabe 3: * Was sind die Unterschiede zwischen den Funktionen

$$f(x) = \frac{(x+t)^3}{(x+t)^2 - 1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

in Bezug auf Definitionsbereich D , Grenzwerte an den Rändern von D , Nullstellen, Monotonieintervalle, relative und absolute Extrema sowie Asymptoten. Skizzieren sie die Graphen von f und g . (Wählen sie für die Zeichnung von f zwei typische Werte für t .)

Aufgabe 4: * Eine Zellkultur von 1000 Zellen vermehrt sich pro Stunde um 20%.

- a) Geben Sie die zugehörige Wachstumsfunktion unter der Annahme an, dass sich die Zellen stetig vermehren.
- b) Berechnen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der ersten 10 Stunden.
- c) Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $1h 5min$ und $2h 5min$.

Lösungen zur 11. Übung:

Aufgabe 1:

$$(iii) 19^x \ln 19; \quad (iv) 15\sqrt{5}(5x-2)^2; \quad (v) -\frac{1}{4x^2}e^{2x} + \frac{1}{2x}e^{2x};$$

$$(viii) (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x) \right).$$

Aufgabe 2:

b) Gesucht ist t , für das $M(t) = \frac{1}{4}M(0)$ gilt. Mit $\lambda = -\frac{1}{5500} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{5500}$ aus a) ergibt das die Gleichung

$$M(0)e^{-\frac{t \ln 2}{5500}} = \frac{1}{4}M(0).$$

Nach Division durch $M(0)$ und Logarithmieren folgt $-\frac{t \ln 2}{5500} = \ln \frac{1}{4}$. Aus dieser Gleichung nach t aufgelöst erhält man $t = 11100$ Jahre für das Alter des Fossils.

c) Zu berechnen ist $M(50000)$. Man erhält, dass nur noch ein Bruchteil von 545 der ursprünglichen Menge $M(0)$ übrig bliebe.

Aufgabe 5: b)

(i) $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, Nullstellen bei $\pm\sqrt{2}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$.

(iii) $f'(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, f ist streng monoton fallend auf $(-\infty, -1)$ und streng monoton steigend für $x \in (1, \infty)$.

(iv) Es gibt keine relativen und keine absoluten Extrema für f .

