LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 30. November 2001

8. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 10.12.2001, bis 11.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Dirichletprobleme**)(10 Punkte):

a) Man gebe ein Dirichletproblem an, das nicht lösbar ist.

b) Bestimmen Sie eine harmonische Funktion u_1 in $\mathbb{E}$ mit

$$\lim_{z \to e^{i\phi}} u_1(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } \phi \in (\phi_1;\phi_2) \\ 0 & \text{für } \phi \in [0;2\pi] \setminus [\phi_1;\phi_2] \end{cases} \qquad \text{mit } 0 < \phi_1 < \phi_2 < 2\pi.$$

c) Bestimmen Sie eine harmonische Funktion u_2 in $K_{r,R}(0)$ mit $0 < r < R < \infty$ und

$$\lim_{z \to \zeta} u_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\zeta| = r \\ 1 & \text{für } |\zeta| = R. \end{cases}$$

Hinweis: bei b) finde man zuerst eine Funktion auf einem anderen Gebiet, die ein ähnliches Randverhalten hat.

Aufgabe 2 (**harmonische Funktionen II**) (6 Punkte)
Es sei $f : \dot{\mathbb{E}} \cup \partial\mathbb{E} \to \mathbb{R}$ stetig, harmonisch im Inneren und beschränkt. Zeigen Sie: f besitzt eine harmonische Fortsetzung nach $\mathbb{E}$.
Hinweis: Definiere g als Lösung des Dirichlet Problems $(\mathbb{E}, f|_{\partial\mathbb{E}})$ (warum existent?) und betrachte die Funktion

$$h_\varepsilon : \dot{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}, \quad h_\varepsilon(z) := f(z) - g(z) + \varepsilon \log|z|,$$

um die Gleichheit von g und f zu zeigen.

Aufgabe 3 (**Poisson-Jensen Formel**)(4+10* Punkte):
Man beweise die folgenden Aussagen:

a*) **Hilfssatz:** Es seien $z, a \in \mathbb{C}$ und $|z| < r = |a|$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\phi} - a| \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi = \log|z - a|.$$

Insbesondere existiert dieses (uneigentliche) Integral.

b*) **Poisson-Jensen Formel:** Es sei $0 < R \leq \infty$ und f meromorph in $\{z; |z| < R\}$, $f \not\equiv 0$. $(a_\mu)_\mu$ sei die Folge der Nullstellen und $(b_\nu)_\nu$ sei die Folge der Polstellen von f. Dabei werde jede Null- und Polstelle sooft aufgeführt, wie ihre Vielfachheit angibt. Es sei $|z| < r < R$, $f(z) \neq 0, \infty$. Dann gilt:

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\phi})| \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi - \sum_{|a_\mu| < r} \log\left|\frac{r^2 - \overline{a_\mu} z}{r(z - a_\mu)}\right| + \sum_{|b_\nu| < r} \log\left|\frac{r^2 - \overline{b_\nu} z}{r(z - b_\nu)}\right|.$$

c) Daraus leite man eine verallgemeinerte Jensensche Formel für eine Funktion f her, die in 0 folgende Laurententwicklung hat:

$$f(z) = c_k z^k + \dots \quad \text{mit} \quad c_k \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei beachte den Satz (3.3) und die Bemerkung (3.4)a).

Hinweis:

a) Benutze die monotone Konvergenz.

b) Man unterscheide die Fälle: f hat weder Nullstellen noch Polstellen in $|z| \leq r$, f hat weder Nullstellen noch Polstellen in $|z| = r$ und den allgemeinen Fall und benutze den jeweils vorigen Fall, in dem man sich eine geeignete Funktion definiert.