LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 12. November 2002

5. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 21. November 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen an:

a) $y'''(x) + y''(x) = 2y(x)$,

b) $y'''(x) = 3y''(x) - 3y'(x) + y(x)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Weiter sei $W(x)$ eine Wronski–Determinante der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0.$$

Zeigen Sie, dass $W(x)$ der Differentialgleichung

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$$

genügt und für ein beliebiges $x_0 \in I$ die Darstellung

$$W(x) = c \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(u)\,du\right)$$

hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes und geben Sie den Konvergenzradius der Lösung an.

Aufgabe 4 (2+4 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ und $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ das charakteristische Polynom von A.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_i in Abhängigkeit von Spur A und det A.

b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen von $y' = Ay$ genau dann asymptotisch stabil sind, wenn Spur $A < 0$ und det $A > 0$.

Aufgabe 5 (4+3 Punkte) Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = p(x)y + q(x)$ mit Funktionen $p, q : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen Lösungen dieser Differentialgleichung asymptotisch stabil, stabil bzw. instabil sind für den Fall, dass

a) p und q stetig sind.

b) p und q Polynome sind.