LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 19. November 2002

6. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 28. November 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+3+3+2+2 Punkte) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und geben Sie maximale Lösungsintervalle an:

a) $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' = y$,

b) $y'' = 4 - y'/x$,

c) $2x + y + (x - 2y)y' = 0$,

d) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' = y'$,

e) $y' = -x/y$, $y(x_0) = y_0 \neq 0$.

Geben Sie im letzten Teil die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von x_0 und y_0 an.

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte) Auf $(0,\infty)$ sei die Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

gegeben. (Als Eulersche Differentialgleichungen bezeichnet man Differentialgleichungen der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = 0$.)
Es sei P das Polynom $P(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$. Beweisen Sie:

a) Sind r_1, r_2 verschiedene Nullstellen von P, so bilden $y_1(x) = x^{r_1}$ und $y_2(x) = x^{r_2}$ ein Fundamentalsystem.

b) Ist r_0 eine doppelte Nullstelle von P, so bilden $y_1(x) = x^{r_0}$ und $y_2(x) = x^{r_0}\log x$ ein Fundamentalsystem.

c) Lösen Sie mit Hilfe von a) oder b) die Differentialgleichung

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

Aufgabe 3 (2+1+2 Punkte) Seien A, B, $C \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Weiterhin sei das Anfangswertproblem

$$Y' = AY + YB, \quad Y(0) = C$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem auf $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $Y(t) = \exp(At) \cdot C \cdot \exp(Bt)$ diese eindeutig bestimmte Lösung ist.

c) Zeigen sie, dass $Y(t)$ im Fall $\max\{\lambda + \mu; \lambda \text{ Eigenwert von } A, \mu \text{ Eigenwert von } B\} < 0$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 4 (1+3+1 Punkte) Es sei

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/x^2 & 2/x \end{pmatrix}.$$

a) Überführen Sie dieses Differentialgleichungssystem in eine Differentialgleichung höherer Ordnung.

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung (mit Lösungsintervall).

c) Geben Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ an.

Aufgabe 5 (7*+2* Punkte)

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y_0 = y(0), y_1 = y'(0)$$

mit $x \in U_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}; |x| < \delta\}$, wobei

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu, \qquad q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu, \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu x^\nu$$

auf $U_\delta(0)$ definiert sind. Weiter sei eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch die Rekursion

$$a_0 := y_0, \qquad a_1 := y_1 \tag{1}$$

$$a_{\nu+2} := \frac{1}{(\nu+2)(\nu+1)} \left(f_\nu - \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu+1) p_{\nu-\mu} a_{\mu+1} - \sum_{\mu=0}^{\nu} q_{\nu-\mu} a_\mu \right), \quad \nu \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert auf $U_\delta(0)$.

(ii) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems auf $U_\delta(0)$.

b) Lösen Sie mit Teil a)

$$y'' + y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$