LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK　　　　Aachen, den 14. Januar 2003

Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

12. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 23. Januar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis: 2. Klausur Aufgrund von Überschneidungen mit anderen Klausuren findet die 2. Klausur zur Analysis III nicht wie vorgesehen am 18. Februar, sondern am 24. Februar statt, und zwar um 17:15 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\geq 1}$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sei gegeben durch

$$f_k(x) = \chi_{[k,k+1]}(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(f_k)_k$ punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und dass für $0 < \eta < 1$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R}; |f_k(x)| \geq \eta\}) = 1.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zu Übung 10, Aufgabe 1?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen an, die dem Maße nach gegen die Nullfunktion streben, die aber keine Lebesgue-integrierbare Majorante besitzen. (Die Zahlenfolge $(\int_M f_k \, d\lambda)_{k\geq 1}$ kann divergent sein.)

Aufgabe 3 (3+2+2 Punkte) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x = -1, x = 1, \\ \frac{1}{k}(1-|x|)^k, & x \in (-1,1) \end{cases} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie mittels des Satzes über die majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} f_k \, d\lambda = 0.$$

b) Überprüfen Sie das Ergebnis aus a) durch explizite Berechnung von $\int_{[-1,1]} f_k \, d\lambda$.

c) Kann zur Begründung der Aussage in a) auch der Satz über die monotone Konvergenz verwendet werden?

Aufgabe 4 (6 Punkte) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral der folgenden Funktion mit Hilfe der Definition (XIV (1.6)), falls es existiert:
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweise (nicht zu beweisen):

a) Das Volumen eines Kreises im $\mathbb{R}^2$ ist gleich dem Produkt von π und dem Radius zum Quadrat.

b)

$$\frac{1}{k+1} < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} < \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgende numerische Funktion quasi-integrierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals:
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{\cdots}, & x \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}) \setminus \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$