LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 04. Februar 2003

15. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 13. Februar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis: Diese Übung wird am Freitag, dem 14. 02. 2003, um 14.00 Uhr im Hörsaal III vorgerechnet.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine l–dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass dann $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine $(k+l)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) = -x^2 - 2xy + 2y + 2z,$$
$$g(x,y,z) = \tfrac{3}{2}x^2 - xy - 3y + z.$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3;\ f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie eine (globale) Parameterdarstellung von M.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, seien definiert durch

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3 - x_2^2,$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_4 - x_3^2,$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\};\ f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte) Berechnen Sie zu den folgenden Karten die Maßtensoren und die Gramschen Determinanten:

a) $\varphi : T \to \varphi(T) \subset M, t \mapsto (t, e^t)^{\mathrm{t}}$, wobei $T := (0,\infty)$ und $M := \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2;\ e^x - y = 0\}$.

b) $\varphi : T \to \varphi(T) \subset M, \binom{s}{t} \mapsto (s, \sin t, 2s\sin t)^{\mathrm{t}}$, wobei $T := \mathbb{R} \times (0, \frac{\pi}{2})$ und
$M := \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3;\ 2xy - z = 0\}$.

Definition: Sei M eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Man nennt

$$\nu(M) := \int_M y^{-2}\, d\lambda_2$$

die *hyperbolische Fläche* von M.

Aufgabe 5 (4* Punkte) Berechnen Sie die hyperbolische Fläche der Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ -\tfrac{1}{2} < x \leq \tfrac{1}{2}, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } x^2 + y^2 > 1 \text{ für } -\tfrac{1}{2} < x \leq 0 \right\}$$

und skizzieren Sie $\mathcal{F}$.

Bemerkung: $\mathcal{F}$ ist ein sogenannter exakter Fundamentalbereich für die Operation der Gruppe $SL(2,\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene (in $\mathbb{C}$), d. h. es existiert genau ein Vertreter aus jeder Bahn dieser Operation in $\mathcal{F}$ (aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{C}$). Sie spielt eine große Rolle in der Theorie der elliptischen Modulformen.
Sei $\tau = x + iy, y > 0$ und $M \in SL(2,\mathbb{R})$. Dann ist die Operation auf τ definiert durch

$$M\langle\tau\rangle := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Es gilt $\nu(M\langle\mathcal{F}\rangle) = \nu(\mathcal{F})$ für alle $M \in SL(2,\mathbb{R})$.

Weitere Informationen finden Sie unter
http://www.mathA.rwth-aachen.de/forschung/fundamentalbereich.html