LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. S. Walcher

Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 14.11.2002

4. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, 21.11.2002, vor der Übung)

Hausaufgaben

Aufgabe 1: Es liege eine Kultur von anfänglich a_0 Bakterien vor. Von diesen sterben ständig soviele Bakterien, dass nach jeweils einem Tag nur noch ein Anteil q mit $0 \leq q < 1$ der ursprünglichen Bakterien vorhanden ist. Um die Verluste auszugleichen, werden jeweils nach einem Tag b neue Bakterien hinzugefügt.

a) Ermitteln und beweisen Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl a_i der nach $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Tagen vorhandenen Bakterien.

b) Wie muss man b wählen, damit die Anzahl der Bakterien nach 10 Tagen ka_0 für ein $k \in \mathbb{N}$ beträgt? Erläutern Sie das Ergebnis für $k = 1$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und geben Sie das kleinste $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < 10^{-3}$ für $n \geq N$ gilt:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, b) $a_n = \frac{6n-2}{3n+7}$, c) $a_n = 4^{-n}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

a) $a_n = \frac{n^2+7n-3}{2n^2-5n+6}$, b) $a_n = \frac{3n^3-1}{4n^2+2}$, c) $a_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$, d) $a_n = \frac{2n+(-1)^n n}{n}$.

Aufgabe 4*: (Ein Populatiosmodell) Für eine (hypothetische) Population gelten folgende Gesetze:

- Die Generationen folgen in diskreten Schritten (etwa: Wochen) aufeinander.
- Jede Generation hat 1000 "Futterpakete" zur Verfügung. Ist x die Zahl der Individuen in dieser Generation, so erhält im Falle $x \leq 1000$ jedes Individuum ein "Futterpaket", im Falle $x > 1000$ erhalten nur 1000 Individuen ein "Futterpaket".
- Individuen, die ein Futterpaket erhalten, produzieren zwei Nachkommen für die nächste Generation. Individuen, die kein Futterpaket erhalten, produzieren keine Nachkommen.

Es sei x_n die Anzahl der Individuen in Generation $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $x_0 > 0$ vorgegeben sei.

a) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf, die die Bestimmung von x_{n+1} aus x_n erlaubt.

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für die Fälle $x_0 = 1$ (ein Individuum am Anfang) bzw. $x_0 = 10000$.

c) In welcher Weise hängt das Langzeitverhalten der Population von x_0 ab? Begründung!

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Eine Bevölkerung von $8 \cdot 10^7$ Menschen im Jahre 2000 nehme jährlich um 1% ab (weil die Anzahl der Gestorbenen jeweils höher ist, als die Anzahl der Neugeborenen), wachse aber am Ende jedes Jahres um $3 \cdot 10^5$ Menschen (Einwanderungsüberschuss). Wieviel Menschen gibt es im Jahre 2010?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n = \dfrac{2n^3+n^2-2n+1}{5n^3+n^2}$, b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2n^3+n^2-2n+1}{n^4+1}$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Hinweis: Benutzen Sie die dritte binomische Formel.