Projekt Geo

Andreas Neuendorf und Thorsten Knops

18.1.2003 und 25.1.2003

1 Aufgabe 2

1.1 Mittelsenkrechte

1. Gegeben seien zwei Punkte A und B. Verbinde diese durch eine Strecke.
2. Schlage um A einen Kreis durch B und um D einen Kreis durch A.
3. Die Schnittpunkte der beiden Kreise seien C und D. Offensichtlich (nach Definition des Kreises) haben die beiden Punkte C und D jeweils denselben Abstand zu A und B.
4. Die Verbindungsgerade $C \vee D$ ist die gesuchte Mittelsenkrechte, denn diese ist laut Buch definiert durch

   $$M_{A,B} = \{x \in \mathbf{E} | \left\langle x - \frac{1}{2}(A+B), A - B \right\rangle = 0\}.$$

   Das ist äquivalent dazu, daß alle Punkte $x \in M_{A,B}$ von A und B jeweils denselben Abstand haben. Denn:

   $$\begin{aligned} & |x-A| = |x-B| \\ \Leftrightarrow\ & |x-A|^2 = |x-B|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \langle x-A, x-A\rangle = \langle x-B, x-B\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \langle A,A\rangle - 2\langle A,x\rangle = \langle B,B\rangle - 2\langle B,x\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \langle x,A\rangle - \frac{1}{2}\langle A,A\rangle - \langle x,B\rangle + \frac{1}{2}\langle B,B\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \langle x, A-B\rangle - \frac{1}{2}\langle A,A\rangle + \frac{1}{2}\langle B,B\rangle - \frac{1}{2}\langle A,B\rangle + \frac{1}{2}\langle A,B\rangle \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \left\langle x - \frac{1}{2}(A+B), A-B \right\rangle \\
& = \langle x, A\rangle - \frac{1}{2}\langle (A+B), A\rangle - \langle x, B\rangle + \frac{1}{2}\langle (A+B), B\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left\langle x - \frac{1}{2}(A+B), A-B \right\rangle = 0
\end{aligned}
$$

1.2 Lot

Üblicherweise konstruiert man das Lot eines Punktes auf eine Gerade wie folgt:

1. Gegeben seien drei Punkte A, B und C in allgemeiner Lage.

2. Verbinde A und B durch eine Gerade.

3. Schlage um C einen Kreis mit einem Radius derart, daß der Kreis die Gerade $A \vee C$ in zwei Punkten schneidet. (In unserer Konstruktion also um C durch A. D sei der zweite Schnittpunkt.)

4. Konstruiere die Mittelsenkrechte durch A und D. Da A und D jeweils denselben Abstand von C haben, verläuft die Gerade nach 1.1 durch C. Damit erfüllt die Mittelsenkrechte alle gesuchten Eigenschaften.

1.3 Winkelhalbierende

1. Gegeben seien drei verschiedene Punkte A, B und C. Zeichne je eine Gerade durch A und B sowie durch A und C.

2. Schlage um A einen Kreis durch B. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden $A \vee C$ sei D.

3. Konstruiere die Mittelsenkrechte von B und D. Nach 1.2 verläuft diese durch A. (Denn die Abstände AB und AD sind gleich groß, und die Mittelsenkrechte zu BD ist die Menge aller Punkte, die von B und D gleich weit entfernt sind.) Weiterhin teilt die Mittelsenkrechte die Strecke $B \vee C$ im Punkt H. Damit sind die Strecken BH und HD gleich lang.

4. Weiter sind in den beiden Dreiecke $\triangle ABH$ und $\triangle AHD$ die Strecken AB und AD gleich lang. Beide haben die gemeinsame dritte Seite AH. Damit sind sie kongruent (SSS).

5. Wegen der Kongruenz sind die Winkel α und β gleich. Es ist $\gamma = \alpha + \beta$, also ist die Gerade durch A und H die Winkelhalbierende von γ.