LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 9. Dezember 2002

8. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 16. 12. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Generalvoraussetzung: Im Folgenden wird die reelle euklidische Ebene $\mathbb{E} = \left(\mathbb{R}^2, <\circ,\circ>\right)$ betrachtet.

Aufgabe 31 (Parallelogramm - Identität) a) Zeigen Sie die Parallelogramm - Identität für die euklidische Norm:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^2 : \quad |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$$

b) Was hat das mit Parallelogrammen zu tun? Interpretieren Sie $|x|^2$ als Fläche eines Quadrats.

c) Gilt die Parallelogramm - Identität auch für Betragssummen von $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$? Gibt es eine positiv definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_1 = \sqrt{\sigma(x,x)}$ für alle x?

Aufgabe 32 (Winkel) a) Beweisen Sie:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^2 : \quad 2 <x,y><z,y> + 2[x,y][z,y] = 2 <z,x><y,y>$$

Hinweis: Benützen Sie die Identität $<a,b>^2 + [a,b]^2 = <a,a><b,b>$.

b) Zeigen Sie: Sind x, y und z verschieden von 0 und $[x,y] \geq 0, [y,z] \geq 0$ sowie $\Theta_{x,y} + \Theta_{y,z} \leq \pi$, dann gilt

$$\Theta_{x,y} + \Theta_{y,z} = \Theta_{x,z}$$

c) Welche Formel gilt für $\Theta_{x,y} + \Theta_{y,z}$, wenn nur $x \neq 0 \neq y \neq 0 \neq z$ und $[x,y] \geq 0, [y,z] \geq 0$ vorrausgesetzt werden? Begründung!

Aufgabe 33 Sei $a \in \mathbb{R}^2$ mit $|a| = 1$. Definiere $S_a := E - 2aa^t$.

a) Berechnen Sie $S_a(a)$ und $S_a\left(a^\perp\right)$.

b) Zeigen Sie $S_a \in \mathrm{O}(2)$, $S_a^2 = E$ sowie $\det S_a = -1$.

c) Finden Sie ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit $S_a = S(\psi)$ und zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Darstellungen: Zu jedem $a \in \mathbb{K}^2$ mit $|a| = 1$ gibt es ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit $S_a = S(\psi)$ und zu jedem $\psi \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^2$ mit $|a| = 1$ und $S_a = S(\psi)$.