LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK Aachen, den 04. November 2002
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

4. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Montag, 11.11.2002, 11.11 Uhr

Aufgabe 1 (algebraische Gruppenstruktur von $\Sigma_{n,r}$)(5 Punkte): Zeigen Sie:

a) $\Sigma_r \times \mathrm{GL}(n-r,\mathbb{R})$ operiert vermöge

$$(M,U)\diamond(g,\kappa) \mapsto \left(M^{-t}gU^{-1}, \kappa[U^{-1}]\right)$$

auf $H^{n,r}$ und

$$((g_1,\kappa_1),(M_1,U_1))\cdot((g_2,\kappa_2),(M_2,U_2)) = ((g_1,\kappa_1)\cdot((M_1,U_1)\diamond(g_2,\kappa_2)),(M_1M_2,U_1U_2))$$

erklärt eine Gruppenstruktur auf $H^{n,r}\times\Sigma_r\times\mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R})$. Dies ist ein allgemeines algebraisches Konstruktionsprinzip und die entstehende Gruppe wird das semidirekte Produkt von $H^{n,r}$ und $\Sigma_r\times\mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R})$ genannt und mit $H^{n,r}\rtimes(\Sigma_r\times\mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R}))$ bezeichnet.

b) $\Sigma_{n,r}$ ist isomorph zu diesem semidirekten Produkt.

Aufgabe 2 (Genauere Eigenschaften von $\Gamma_{n,0}$)(7 Punkte): Zeigen Sie:

a) Jede Nebenklasse $\Gamma_{n,0}M$, $M\in\Gamma$ besitzt einen Repräsentanten der Form $(M_1\times E)\cdot\mathrm{rot}(U^{-1})$ mit $U\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$ und $M_1\in\Gamma_r$ mit $\det C_1\neq 0$ (vgl. Aufgabe 3 Übung 3).
Hinweis: Satz (3.6)

b) Sei

$$\Delta_{n,r} := \left\{V\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z}); V=\begin{pmatrix} * & 0^{r,n-r}\\ * & *\end{pmatrix}\right\}.$$

$U\Delta_{n,r}$ ist eindeutig bestimmt. Desweiteren ist nach der Wahl von U die Nebenklasse $\Gamma_{r,0}M_1$ eindeutig bestimmt und es gilt

$$\Gamma_{n,0}\backslash\Gamma_n = \dot{\bigcup_{0\le r\le n}} \left\{(M_r\times E)\,\mathrm{rot}(U^{-1}); U\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})/\Delta_{n,r}, M_r\in\Gamma_{r,0}\backslash\Gamma_r \text{ mit } \det C_{M_r}\neq 0\right\}.$$

c) Sei nun $M\in\Gamma_n$ mit $\mathrm{rang}(C)=r>0$. Zeigen Sie die Existenz von Matrizen $U\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$, $S\in\mathrm{Sym}(r;\mathbb{Q})$ und $C_0\in\mathbb{Z}^{(r,r)}$ mit

$$|\det(CZ+D)| = |\det C_0|\cdot|\det(Z[U]_1+S)| \quad \text{für alle} \quad Z\in\mathbb{H}_n,$$

wenn der Index 1 den r-reihigen Block links oben bezeichnet.

Aufgabe 3 (Reduzierte Matrizen)(4 Punkte): Zeigen Sie für alle $S=D[B]\in\mathcal{R}_n$ mit $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ und $B=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

$$d_j \ge \frac{3}{4}d_{j-1} \quad \text{für alle} \quad 2\le j\le n.$$

Aufgabe 4 (Fundamentalbereichsmatrizen II)(4 Punkte): Zeigen Sie für $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2\\ y_2 & y_3\end{pmatrix}\in\mathcal{P}_2$:

$$iY\in\mathcal{F}_2 \text{ genau dann, wenn } y_1\ge 1, y_1y_4-y_2^2\ge 1 \text{ und } 0\le 2y_2\le y_1\le y_4.$$