LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 14. November 2002

5. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 19.11.2002, 16.00 Uhr (siehe Hinweis)

Hinweis: Durch die Verschiebung der Vorlesung gibt es diese Woche nur eine halbe Übung:
Die Aufgaben 1 und 3 sind bis Dienstag, den 19.11.2002 abzugeben, die beiden anderen Aufgaben eine Woche später.

Aufgabe 1 (**Fundamentalbereich**)(5 Punkte):
Bestimmen Sie explizit ein $M \in \Gamma_2$, so dass

$$M < Z > \in \mathcal{F}_2 \quad \text{für} \quad Z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (**Zweite Blockzeilen**)(10 Punkte):
Definition: Eine Matrix $M \in \mathbb{Z}^{(m,n)}$ mit $m \leq n$ heißt *primitiv*, wenn man sie zu einer Matrix in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$ ergänzen kann.

a) (C, D) ist eine zweite Blockzeile einer Matrix in Γ_n genau dann, wenn (C,D) primitiv ist und CD^{tr} symmetrisch ist.

b) Zu $R \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Q})$ existiert eine Matrix $M \in \Gamma_n$ mit $\mathrm{Rang}\, C = n$ und $R = C^{-1}D$.
Hinweis: Elementarteilergestalt zu R und a).

c) Sind M, $M' \in \Gamma_n$ Matrizen, die b) erfüllen, so gilt

$$\Gamma_{n,0}M' = \Gamma_{n,0}M.$$

Aufgabe 3 (**Paramodulare Gruppe II**)(5 Punkte):
Definition: Zwei Gruppen G,H heißen *kommensurabel*,wenn $G \cap H$ endlichen Durchschnitt in G und H hat.
Sei $P = \mathrm{diag}(1, d_2, \ldots, d_n)$ in Elementarteilergestalt, also $d_1 = 1$ und $d_i | d_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ gilt.

a) Sind die paramodulare Gruppe $\Gamma(P)$ und Γ_n kommensurabel?

b) Man zeige für die übliche Blockzerlegung, dass alle Elemente $M \in \Gamma(P)$ die folgende Gestalt haben:

$$b_{ij} \in d_{\min\{i,j\}}^{-1}\mathbb{Z}, \quad c_{ij} \in d_{\max\{i,j\}}\mathbb{Z}.$$

Man gebe analoge (maximale) Bedingungen für a_{ij} und d_{ij} an und untersuche die Frage, ob die folgende Umkehrung gilt:

Ist $M \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{Q})$ und sind A, B, C, D von obiger Gestalt, so ist $M \in \Gamma(P)$.

Aufgabe 4 (**Siegelsche Bereiche**)(5 Punkte):
Für $t > 0$ definieren wir einen Siegelbereich $Q'_n(t)$ vermöge

$$Q'_n(t) = \{Y \in \mathcal{P}_n; Y = D[B] \text{ genügt (i), (ii)}\},$$

wobei $D[B]$ die Jacobi-Zerlegung von Y ist und

(i) $d_i < td_{i+1}$ für $1 \le i \le n-1$,

(ii) $|b_{ij}| < t$ für $1 \le i < j \le n$.

Zeigen Sie: Es existiert ein $t_0 > 0$ mit $\mathcal{R}_n \subset Q'_n(t)$ und

$$\left\{ P_Z \left[\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right] ; Z \in \mathcal{F}_n \right\} \subset Q'_{2n}(t)$$

für alle $t \ge t_0$. Hierbei ist $W = (\delta_{n-i+1,j})_{1 \le i,j \le n}$ und P die in der Aufgabe 2 Übung 2 definierte Abbildung.