LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 06. Dezember 2002

8. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 10.12.2002, 16.00 Uhr

In dieser Übung werden wir uns mit Poincaré-Reihen beschäftigen:
Aufgabe 1(**Neuer Kozykel**)(5 Punkte)

Seien $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$ und $Z, W \in \mathcal{H}_n$. Dann definiere

$$M\{Z,W\} := AZ + B + WCZ + WD = (M < Z > +W)M\{Z\}.$$

Desweiteren sei

$$M^* := \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} = M \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie für $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$:

a) $M_1\{Z,W\}^{tr} = (M_1^*)^{-1}\{W,Z\}$.

b) $(M_1M_2)\{Z,W\} = M_1\{M_2 < Z >, W\}M_2\{Z\}$.

c) $M < -\overline{Z} >= -\overline{M^* < Z >}$.

d) $\left(\det M\{-\overline{Z}\}\right)^2 = \overline{\det M^*\{Z\}^2}$.

Definition 1:

a) $T_{n,n} := \{\mathrm{trans}(S); S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z})\}$.

b) Für $0 \leq j \leq n$ sei $\chi : \Gamma_{n,j} \to \Gamma_j$ der durch $M \mapsto M_1$ definierte Homomorphismus, wobei $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{smallmatrix}\right)$ wie in Übung 3 Aufgabe 3a) definiert ist. Dann definiere für $0 < j \leq n$ die folgenden Gruppen

$$T_{n,j} := \chi^{-1}\left(T_{j,j}\right), \quad B_{n,j} := \mathrm{Kern}\,\chi.$$

Für $j = 0$ sei $T_{n,0} := B_{n,0} := \Gamma_{n,0}$.

Aufgabe 2 (**Neue Gruppen?**)(5 Punkte):
Zeigen Sie für $0 \leq j \leq n$:

a)

$$T_{n,j} = \left\{\mathrm{rot}(U)\,\mathrm{trans}(S); S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z}), U = \begin{pmatrix} E_j & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})\right\},$$

b)

$$B_{n,j} = \left\{\mathrm{rot}(U)\,\mathrm{trans}(S) \in T_{n,j}; S_1 = 0\right\}.$$

Definition 2: Seien $0 \leq j \leq n$, $f : \mathcal{H}_j \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt sowie $k \in \mathbb{N}$. Dann definiere für $W \in \mathcal{H}_j$

$$P_{n,j}^k(Z,W,f) := \sum_{M : B_{n,j} \backslash \Gamma_n} f(M < Z >_1) \det(M < Z >_1 + W)^{-k} (\det M\{Z\})^{-k}.$$

Wir nennen $P_{n,j}^k(Z,W,f)$ die *Poincaré-Reihe* zu f mit *Entwicklungspunkt* W.

Aufgabe 3 (Poincaré-Reihen als Modulformen)(10 Punkte):

a) Im Fall $j = 0$ gilt (f als Konstante aufgefasst)

$$P^k_{n,0}(Z,W,f) = E^k_{n,0}(Z,f) = fE^k_n(Z),$$

also insbesondere die Konvergenz.

b) Im Fall $j = n$ gilt:
Theorem 1: Sei $f : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt sowie $k > 2n$ und $\varepsilon > 0$. Dann konvergiert die Poincaré-Reihe

$$P^k_{n,n}(Z,W,f) := \sum_{M\in\Gamma_n} f(M < Z >)(\det M\{Z,W\})^{-k}$$

absolut und gleichmäßig für Z,W aus den Vertikalstreifen

$$\mathcal{V}_{\varepsilon,n} := \{Z \in \mathcal{H}_n; \mathrm{Sp}(X^2) \le \varepsilon^{-2}, Y \ge \varepsilon E\}.$$

Darüberhinaus ist $P^k_{n,n}(Z,W,f)$ eine Spitzenform zu Γ_n vom Gewicht k.
Hinweis: Für die Konvergenz zeigen Sie zunächst, dass man sich auf den Fall $Z = W = iE$ beschränken kann und benutzen Sie (ohne Beweis) die folgenden Lemmata:
Lemma 1: Seien $k > 2n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Konstante $c = c(n,\varepsilon) > 0$, so dass

$$\sum_{M\in\Gamma_n} |\det M\{Z,W\}|^{-k} \le c(\det Y)^{-\frac{k}{2}} \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{H}_n, W \in \mathcal{V}_{\varepsilon,n}.$$

Lemma 2: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $c = c(n,\varepsilon) > 0$, so dass

$$|\det(Z+W)| \ge c|\det(iE+W)| \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{V}_{n,\varepsilon} \text{ und } W = U+iV \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C}), V \ge 0.$$

c) Seien $0 < j < n$, $k > n+j+1$, k gerade und $\varepsilon > 0$. Dann gilt das folgende Theorem:
Theorem 2: Ist $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so konvergiert die Poincaré-Reihe

$$P^k_{n,j}(Z,W,f) := \sum_{M:B_{n,j}\backslash\Gamma_n} f(M < Z >_1)\det(M < Z >_1 + W)^{-k}(\det M\{Z\})^{-k}$$

absolut und gleichmäßig für $Z \in \mathcal{V}_{\varepsilon,n}$, $W \in \mathcal{V}_{\varepsilon,j}$ und stellt eine Modulform zu Γ_n vom Gewicht k dar. Man hat

$$E^k_{n,j}(\cdot,P^k_{j,j}(\cdot,W,f)) = P^k_{n,j}(\cdot,W,f)$$

und

$$P^k_{n,j}(\cdot,W,f)|\Phi = P^k_{n-1,j}(\cdot,W,f).$$

Machen Sie sich auch klar, dass die Definition in diesem Fall unabhängig von dem Vertretersystem ist.
Hinweis: Man benutze für die Konvergenz die Ergebnisse für Klingen-Eisenstein-Reihen.

Bemerkung: Den Beweis der Lemmatas, die obigen Ergebnisse sowie weitere Informationen über Poincaré-Reihen kann man z.B. in Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions, LNM 1143, Springer Verlag, nachlesen.