LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 13. Dezember 2002

9. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 17.12.2002, 16.00 Uhr

Organisatorisches: Die 3. Aufgabe des letzten Übungsblattes kann noch eine Woche länger bearbeitet werden. Die zweite Aufgabe dieses Blattes muss erst am 07.01.03 um 16.00 Uhr abgegeben werden.

Aufgabe 1(**Konvergenz der Siegelschen Eisenstein-Reihen**)(10 Punkte)
Es sei $T \in \mathcal{P}_m$. Zeigen Sie:

a) Die Reihe
$$\zeta_T(s) = \sum_{0 \neq g \in \mathbb{Z}^m} (T[g])^{-s}$$
konvergiert für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ absolut.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass sie sich auf den Fall $T = cE$ beschränken können und benutzen Sie dann eine Induktion nach m, um die Aussage zu beweisen.

b) Seien $1 \leq r \leq m$ und $\mathcal{U}_r := \mathrm{GL}(r;\mathbb{Z})$. Dann konvergiert die Reihe
$$\zeta_T^{(r)}(s) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,r)}/\mathcal{U}_r, \mathrm{Rang}\, G = r} (\det T[G])^{-s}$$
für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ absolut.
Hinweis: Wählen Sie den Vertreter G so, dass $T[G] \in \mathcal{R}_r$ gilt.

c) Zeigen Sie nun, dass die Siegelsche Eisenstein-Reihe E_n^k für gerades $k > 2n$ auf jedem Vertikalstreifen in $\mathcal{H}_n$ absolut-gleichmäßig konvergiert.
Hinweis: Übung 2 Aufgabe 1.

d) Zeigen Sie das folgende Lemma:
Lemma: Seien $Y = \begin{pmatrix} A & * \\ * & * \end{pmatrix} > 0$, $A = A^{(j)}$ und $Y^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$, $D = D^{(n-j)}$. Dann gilt
$$\frac{\det A}{\det Y} = \det D.$$

e) Beweisen Sie mit d), dass die Klingen-Eisenstein-Reihen für gerades $k > 2n$ auf jedem Vertikalstreifen in $\mathcal{H}_n$ absolut-gleichmäßig konvergieren.

Definition: Für eine Gruppe G, $G \leq H$ und $a, b \in G$ schreiben wir $a \equiv b \mod H$, falls $aH = bH$. Der Kommutator von a und b ist $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$. Die Kommutatorgruppe $\mathcal{C}G$ ist diejenige Untergruppe von G, die von allen Kommutatoren von Elementen aus G erzeugt wird. G^{ab} sei die Gruppe der Charaktere (Homomorphismen von $G \to \mathbb{C}^\times$). Ist der Index $[G : \mathcal{C}G]$ endlich, so gilt $G/\mathcal{C}G \cong G^{\mathrm{ab}}$. Sei $E_{kl} = (\delta_{kl}\delta_{ij})_{i,j}$ die Matrix, die an der Stelle (k,l) den Eintrag 1 hat, sonst nur 0.

Aufgabe 2 (Charaktere der paramodularen Gruppe zu $\mathrm{diag}(1,t)$)(10 Punkte):

a) Man berechne in $\Gamma(P)$ die Matrix W, die durch

$$[\mathrm{rot}(U), \mathrm{trans}(S)] = \mathrm{trans}(W)$$

definiert ist. Durch geeignete Wahl von S und U bekommt man dann

$$\mathrm{trans}(W) \in \mathcal{C}\Gamma_t \quad \text{für } W = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit zeige man
Korollar:

(i) $\mathrm{trans}(S) \in \mathcal{C}\widehat{\Gamma}_t$ für $S = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

(ii) $\mathrm{trans}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathrm{trans}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mod \mathcal{C}\widehat{\Gamma}_t$.

b) Man zeige für $S \in \{M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{Q}); M = M^{tr}, MP \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{Z})\}$ mit $(PS)^2 = E$:

$$(-J_P \,\mathrm{trans}(S))^3 = \begin{pmatrix} SP & 0 \\ 0 & PS \end{pmatrix}$$

und folgere daraus

$$\begin{pmatrix} 0 & -P^{-1} \\ P & 0 \end{pmatrix} := J_P \equiv \mathrm{trans}(-3P^{-1}) \mod \mathcal{C}\Gamma_t.$$

Wie lautet diese Gleichung in $\widehat{\Gamma}_t$?

c) Benutzen Sie das folgende Lemma (ohne Beweis)
Lemma (Kappler): Für $P = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ in Elementarteilergestalt wird $\widehat{\Gamma}(P)$ erzeugt von J_E und $\mathrm{trans}(S_{ij})$ für $1 \le i \le j \le n$ mit

$$S_{ij} = \begin{cases} E_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{t_j}{t_i} E_{ij} + E_{ji} & \text{falls } i < j \end{cases}$$

und zeigen Sie damit das folgende

Lemma: Für $P = \mathrm{diag}(1,t)$ und jedes $M \in \widehat{\Gamma}(P)$ hat die Nebenklasse $M\,\mathcal{C}\widehat{\Gamma}(P)$ einen Repräsentanten der Form $\mathrm{trans}(B)$, wobei $B = \sum_{j=1}^{2} b_j E_{jj}$ diagonal ist. Darüberhinaus kann man b_1 modulo $\mathrm{ggT}(t,12)$ und b_2 modulo $\mathrm{ggT}(2t,12)$ reduzieren.
Hinweis: $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}\,\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$.

d) Die Gruppe der (abelschen) Charaktere $\widehat{\Gamma}_t^{ab}$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{C}_{b_1} \times \mathcal{C}_{b_2}$.

e) Man zeige, dass diese obere Schranke für $\mathrm{ggT}(t,12) = 1$ scharf ist, in dem man genug Charaktere erzeugt.
Hinweis: Reduziere in $\widehat{\Gamma}_t$ modulo 2.

Bemerkung: Die Charaktere der paramodularen Gruppe für $n = 2$ sind von Gritsenko bestimmt worden. Für größere n kann man nachsehen in Dern, Marschner, Characters of paramodular groups and some extensions, Communications in Algebra, Marcel Dekker Verlag.