Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 29. Oktober 1999

4. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 5.11.1999, 12.00 Uhr

Organisatorisches: Bitte beachten Sie folgende Änderungen:

Freitag,	12.00–13.30 Uhr:	Vorlesung im Hörsaal I (bisher 11.45–13.15 Uhr)
Donnerstag,	17.15–18.15 Uhr:	Beratungsstunde G. Hagel, R. 248 (bisher 14.00–15.00 Uhr)
Freitag,	12.00 Uhr:	Abgabe der Übungen (bisher Montag, 15.30 Uhr)

Die korrigierten Übungen, die in der Übung am Donnerstag nicht abgeholt werden, liegen danach hinter der Tür zu den Räumen 243-248 im Hauptgebäude aus.

Aufgabe 1 (4 Punkte):
(1) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|4x-1| \geq |x-2| + 4$ und $|x-4| < 8$?
(2) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{1}{x+|x-1|} < 2$?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Zeigen Sie:
(1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{x+y}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.
(2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| + |x-y| \geq |x| + |y|$.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere Mengen. Wir definieren

$$A \cdot B := \{ab \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}, \qquad -A := \{-a \,|\, a \in A\},$$
$$A + B := \{a + b \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

(1) Zeigen Sie: $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, falls A und B nach oben beschränkt sind.
(2) Zeigen Sie: $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, falls A und B nach oben beschränkt sind.
(3) Zeigen Sie: $\inf A = -\sup(-A)$, falls A nach unten beschränkt ist.
(4) Zeigen oder widerlegen Sie: $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$, falls A, B nach oben beschränkt sind und $A \cap B \neq \varnothing$ ist.
(5) Zeigen oder widerlegen Sie: $\sup(A \cdot B) = \sup A \, \sup B$, falls A, B nach oben beschränkt sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Untersuchen Sie, ob folgende Mengen reeller Zahlen nach oben bzw. unten beschränkt sind, bestimmen Sie ggf. Supremum bzw. Infimum und untersuchen Sie, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum handelt:

$$(1) \quad \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad (2) \quad \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$(3) \quad \left\{ \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 5 ($*$): Zeigen Sie: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a| + |b| + |c| + |a+b+c| \geq |a+b| + |b+c| + |c+a|.$$