Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 12. November 1999

6. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 19.11.1999, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(1) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid x = \frac{n}{m}$ für ein $0 \neq m \in \mathbb{Z}\}$,

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,

(3) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$,

(4) $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z+z_0}{z-z_0}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ sei.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(1) f ist injektiv,
(2) es existiert $g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$,
(3) für alle $A \subset X$ ist $f^{-1}(f(A)) = A$,
(4) für alle $A_1, A_2 \subset X$ ist $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte): Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ explizit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:
(1) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+n}}$,

(2) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$,

(3) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1} + 1$,

(4) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{n^k}{c^n}$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < c \in \mathbb{R}$ sei.

Aufgabe 5 ($*$): Sei $\varnothing \neq A$ eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, etwa wie zu Satz II 2.6 der Vorlesung.

Aufgabe 6 ($*$): Sei $\mathbb{Q}[X]$ die Menge der reellen Polynome mit rationalen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists\, 0 \neq p \in \mathbb{Q}[X] :\ p(x) = 0\}$$

aller komplexen Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ abzählbar ist.
Bemerkung: $\mathcal{A}$ ist die Menge der algebraischen Zahlen.