Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker Aachen, den 19. November 1999

7. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 26.11.1999, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen $\left((1+(-1)^n)\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$ und $(Re((1+1/n)i^n))_{n\geq 1}$. Geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine (reelle) Folge und $\varnothing \neq B \subset \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$. Zeigen Sie: Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in B (also $b_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(b_n)_{n\geq 1}$, so ist bereits $x \in B$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (1) Sei $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, definiert durch $a_1 = c$ und $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.
(2) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_1 = -1$ und $a_{n+1} = -\sqrt{1+|a_n|}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4 (4 Punkte) (1) Zeigen Sie, dass die Folge $\left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)_{n\geq 1}$ monoton fallend und konvergent mit Grenzwert e ist.
(2) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $\left((1-\frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$, $\left((1+\frac{1}{n})^{2n}\right)_{n\geq 1}$ und $\left((1+\frac{1}{2n})^n\right)_{n\geq 1}$.

Aufgabe 5 ($*$): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $a_1 = a$, $a_2 = b$ und $a_{n+2} = \dfrac{1}{q}a_{n+1} + \dfrac{q-1}{q}a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6 ($*$): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge und $(A_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.
(1) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so ist auch $(A_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(2) Folgt umgekehrt aus der Konvergenz von $(A_n)_{n\geq 1}$ auch die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1}$?