LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 21. Januar 2000

14. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 28.1.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $D = [a, b]$ und $f : D \to D$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d. h. dass ein $x \in D$ existiert mit $f(x) = x$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie:
(1) exp ist auf jedem Intervall $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
(2) log ist auf jedem Intervall $[a, \infty)$ mit $0 < a$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $D = (a, b)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:
(1) Ist f gleichmäßig stetig und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in D, so ist auch $(f(x_n))_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge.
(2) f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x)$ existieren.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie:
(1) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $1 + x \leq \exp(x)$.
(2) Folgen Sie aus (1) und der Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$n\left(1 - \frac{1}{x^{1/n}}\right) \leq \log(x) \leq n(x^{1/n} - 1) \qquad \text{für } x \in (0, \infty) \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) (1) Zeigen Sie: Für $x, y, x + y \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ ist

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

(2) Zeigen Sie: Die Funktionen

$$\cosh|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to [1, \infty), \quad \sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \tanh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (-1, 1), x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

sind streng monoton und bijektiv. Für die Umkehrfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}(x) &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \operatorname{arsinh}(x) &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 6 ($*$) Sei $a > 0$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \text{und} \qquad f(x) \leq a(x - 1) \qquad \text{für alle } x, y \in (0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass f dadurch bereits eindeutig bestimmt ist. Welche Funktion ist f?