

GEONE_xT-Einführung

1 Überblick und Bezugsquelle

Die dynamische Mathematiksoftware GEONE_xT eröffnet neue Wege des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht. Sie erlaubt Visualisierungsmöglichkeiten, die mit Papier, Bleistift und traditionellen Konstruktionswerkzeugen bzw. an der Tafel nicht realisierbar sind. Vorrangiges Ziel von GEONE_xT ist es, das Lehren und Lernen von Mathematik angeregter, effizienter und nachhaltiger zu gestalten.

Entwickelt wurde GEONE_xT am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Bayreuth. GEONE_xT kann unter verschiedenen Betriebssystemen, wie z.B. Windows, Linux und Mac OS, eingesetzt werden.

GEONE_xT kann **ohne Kosten** im Unterricht und außerhalb der Schule verwendet werden. Unter <http://www.geonext.de> steht die jeweils aktuelle, kostenfreie Version, sowie eine Reihe von zusätzlichem Material, zum Download bereit.

2 Anwendungsmöglichkeiten

GEONE_xT kann sowohl als eigenständiges Programm, wie auch im Rahmen von Lernumgebungen auf HTML-Basis Anwendung finden.

Als eigenständiges Programm ist es ein Werkzeug zum Erstellen von Konstruktionen. Im Gegensatz zu Zeichnungen auf Papier lassen sich GEONE_xT -Konstruktionen nachträglich vielfältig variieren und dynamisch verändern (*Zugmodus*).

Bindet man GEONE_xT in HTML-Seiten ein, so können Texte, Graphiken, Bilder und bewegliche Konstruktionen zusammengefügt werden. Dies macht es möglich dynamische Arbeitsblätter zu erstellen. Es gibt auch schon fertige dynamische Arbeitsblätter, z.B. in Buchform mit CD-Rom:

Baptist, Peter, Mathematik Klasse 7/8, Lernen und Lehren mit dynamischen Arbeitsblättern, Das Handbuch zur CD-ROM, 2004.

Andere Quellen für fertige Arbeitsblätter finden sich unter anderem auch im Internet. Beispiele sind:

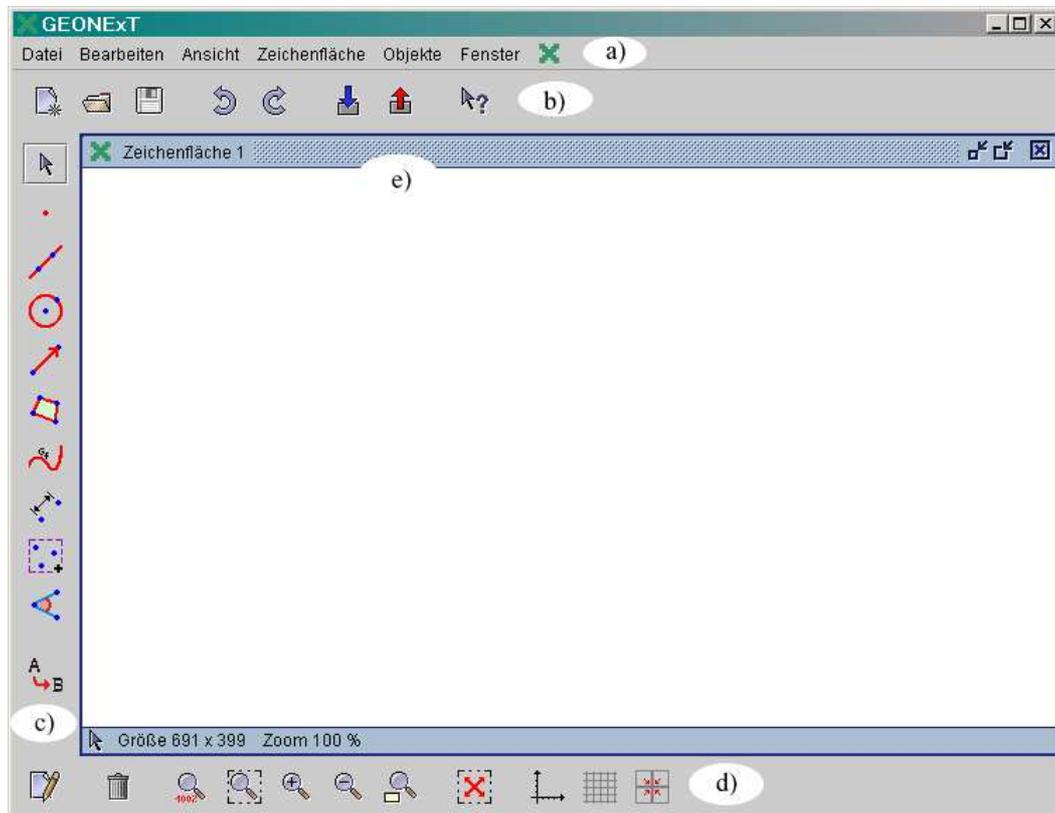
<http://www.geonext.de>

<http://home.eduhi.at/teacher/alindner/geonext/geonext/index.htm>

(Gymnasium Bad Ischl)

3 Aufbau der GEONExT -Oberfläche

Die GEONExT -Benutzeroberfläche sieht wie folgt aus und besteht aus den Komponenten:



- a) Menüleiste (ganz oben)

Über die Untermenüs der Menüleiste sind alle GEONExT -Befehle zugänglich. Ein paar häufig gebrauchte Befehle sind jedoch auch direkt über die sichtbaren Symbole (vgl. b bis d) zu verwenden.

- b) Kopfleiste (oben)

Das Symbol  erzeugt eine neue Zeichenfläche.

Die weiteren Befehle  sind: Datei öffnen, Datei speichern, Rückgängig, Wiederherstellen, Einfrieren (Zwischenstand speichern) und Auftauen (Zwischenstand öffnen), sowie die Direkthilfe.

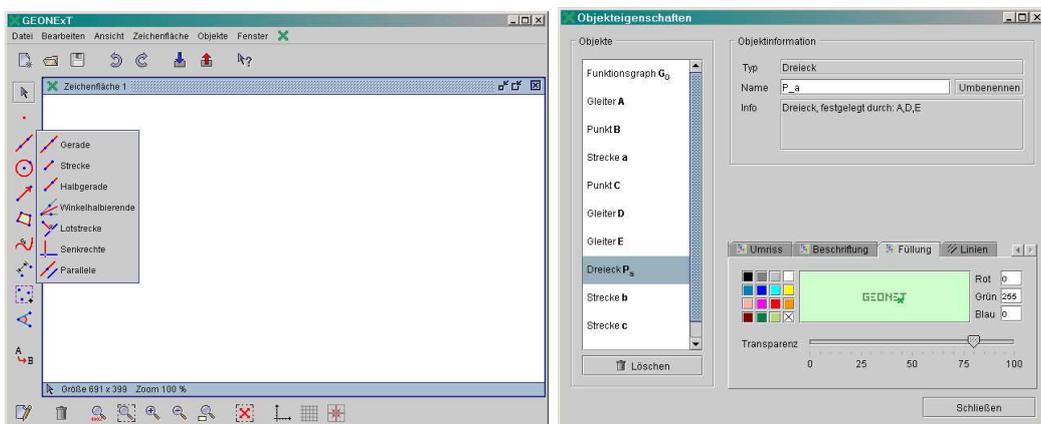
- c) Konstruktionselemente/Objekte (links)

Vorweg das Symbol : Wählt man dieses Symbol an, so kann man Punkte auf der Zeichenfläche verschieben.

Die Zeichenelemente sind durch einfachen Mausklick anzuwählen, mit Doppelklick erhält man zusätzliche verwandte Zeichenelemente. Neben Objekten wie Punkten  Geraden

, Kreisen  und Vektoren  sind auch zusammengesetzte Objekte wie Streckenmittelpunkt (Doppelklick auf ) und Umkreis (Doppelklick auf ) vorhanden. Insbesondere sei hier auf das Symbol / Icon „Objekteigenschaften“  (links unten) hingewiesen, in dessen separatem Dialogfenster es z.B. möglich ist die Linienstärke einer Geraden, die Farbgebung, die Transparenz von eingefärbten Flächen, Beschriftung und Darstellungsform zu variieren.

Einen Überblick über die Zeichenelemente bietet auch das Menü „Objekte“, in dem sich außerdem das Programm „Animation“ befindet. Für eine Animation ist insbesondere das Element „Gleiter“ (unter Punkt zu finden) und „Spur“ (Spezielle Objekteigenschaften) hilfreich.

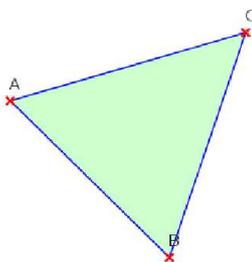


- d) Einstellungen der Arbeitsfläche (unten)
Hier finden sich Optionen wie Lupe, Gitter und Koordinatenachsen.
- e) Der Bereich für Arbeitsflächen in der Mitte.

4 Beispiele

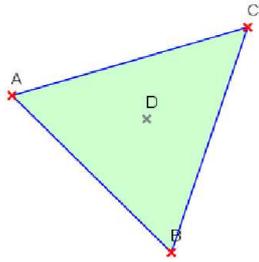
4.1 Der Umkreis beim Dreieck

Umkreis „ohne Konstruktion“

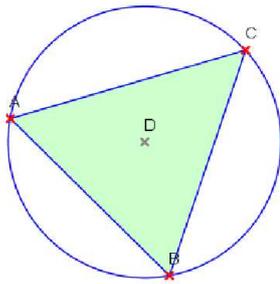


Ein beliebiges Dreieck mit dem Objekt „Polygon“  zeichnen. Dazu klickt man die gewünschte Eckenmenge an und beendet das Polygon durch erneutes Anklicken der ersten Ecke

Besonderheit: Man kann sowohl bestehende Punkte anwählen und als Ecken verwenden, als auch (wenn kein Punkt markiert ist) einen neuen Punkt erschaffen und als Ecke definieren. Ganz analog geht das bei allen Befehlen, die Punkte verwenden.



Das Objekt „Umkreismittelpunkt“ unter „Punkte“ (Doppelklick auf  markieren.
Dreieckspunkte nacheinander anklicken: Umkreismittelpunkt wird angezeigt.



Objekt „Kreis“  markieren.
Kreismittelpunkt und einen der Dreieckspunkte anklicken: Umkreis wird angezeigt.

Aufgabe

Konstruieren Sie den Umkreis eines beliebigen Dreiecks ohne den Befehl „Umkreismittelpunkt“.

Tipp: Um den Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) mehrerer Objekte (Gerade mit Gerade, Gerade mit Kreis, Kreis mit Kreis) zu markieren verwendet man das Objekt „Schnitt“ unter der Auswahl der Punkte.

Für eine Lösung vergleiche Abbildung 1 auf Seite 5.

Thematisch ähnliche Aufgaben

- Inkreis
- Schnittpunkt der Höhen
- Feuerbachkreis
- Euler-Gerade

4.2 Achsenspiegelung / Schrägspiegelung

Anhand der Achsen- und Schrägspiegelung werden die Objekte „Vektorpfeil“  und sein „Stellvertreter“, sowie das Objekt „Animation“ und „Spurkurve“ vorgestellt.

Eine Achsenspiegelung kann mit dem fertigen zusammengesetzten Objekt „Punkt (Achsen Spiegelung)“ realisiert werden:

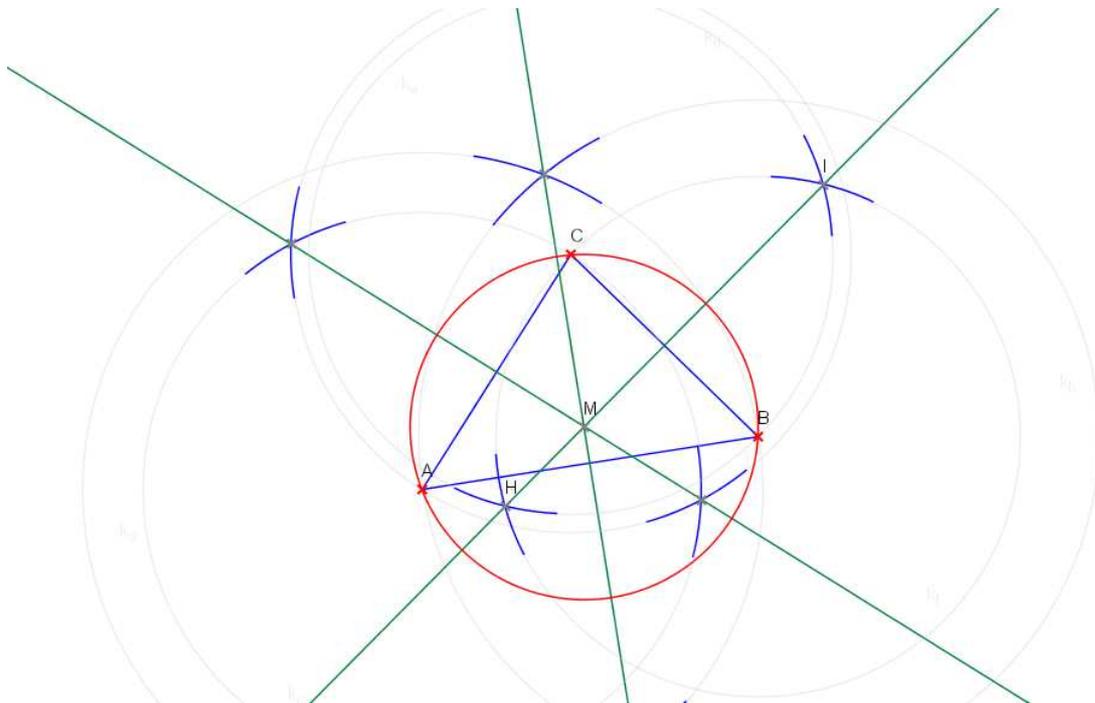


Abbildung 1: Umkreis mit Zirkel und Lineal

Es wurde ausschließlich mit den Objekten „Kreis“, „Punkt“, „Schnitt“ und „Gerade“ gearbeitet. Es wurden Farben geändert, Objekte versteckt oder nur als Entwurf dargestellt und der Mittelpunkt wurde umbenannt.

(mit „Objekteigenschaften“:  oder Menu „Objekte / Objekteigenschaften“).

Achsen Spiegelung „ohne Konstruktion“

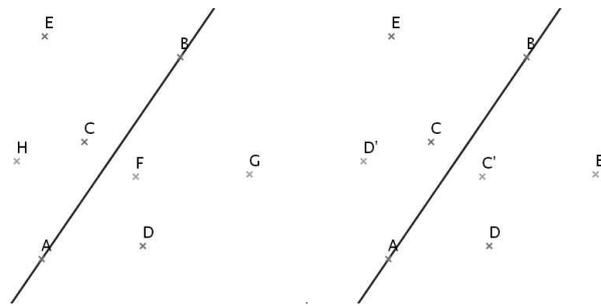
Man benötigt zur Spiegelung von Punkten lediglich eine Gerade, die zur Spiegelgeraden wird, und beliebige Punkte. Diese Punkte können nun mit dem Objekt „Punkt (Achsen Spiegelung)“ gespiegelt werden. Gespiegelte Punkte erscheinen mit einem grauen Kreuz (wie alle durch Konstruktion erzeugten Punkte). Zur Vereinfachung des Bildes können die Konstruktionspunkte der Spiegelgeraden „versteckt“ werden. Nachträglich können die Bildpunkte z.B. in die gestrichene Form des gespiegelten Punktes umbenannt werden.

Wird einer der „Punkte“ bewegt, so bewegt sich der Bildpunkt immer gespiegelt mit. Die Bildpunkte selber können nicht bewegt werden.

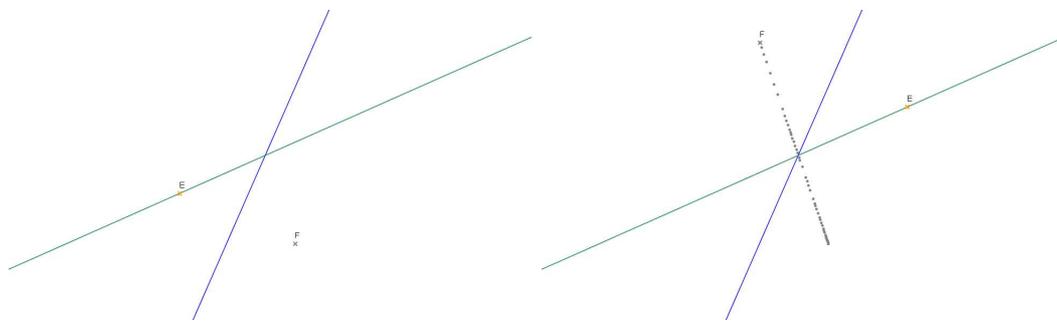
Die Achsen Spiegelung mit GEONEX_T bietet verschiedene Anwendungsmöglichkeiten. So können zum Beispiel symmetrische Bilder erstellt werden oder aber zusammengesetzte Objekte gespiegelt werden, indem man den gespiegelten Punkt als „Spur“ anzeigen lässt.

Hier wird gezeigt, wie eine Gerade gespiegelt werden kann. Ganz analog kann mit einem Kreis verfahren werden. Es gibt vier Möglichkeiten der Darstellung:

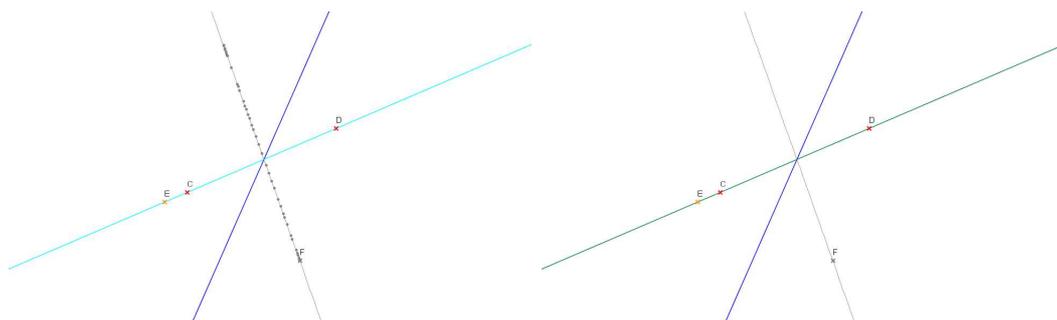
Zunächst können einzelne Punkte des Objektes gespiegelt werden. Dafür setzt man auf die zu spiegelnde Gerade einen zusätzlichen „Gleiter“. Diesen spiegelt man, stellt in den Eigenschaften des gespiegelten Punktes ein, dass die Spur angezeigt werden soll und bewegt nun den



Gleiter. Je nachdem wie schnell der Gleiter auf der Geraden bewegt wird, erscheinen mehr oder weniger gespiegelte Punkte. Um die Übersicht zu erhöhen wurden die Konstruktionspunkte der Geraden versteckt und die zu spiegelnde Gerade umgefärbt.



Eine weitere Möglichkeit der Darstellung ist, das Bild des zu spiegelnden Objektes als „Spurkurve“ (Doppelklick auf ) darzustellen. Dies kann im Anschluss an die erste Variante geschehen (die Spiegelpunkte werden verbunden), oder aber auch direkt.



Ein Vorteil der Spurkurve ist, dass sie sich bei Bewegung des Objektes mitbewegt.

Die dritte Darstellungsmöglichkeit ist der ersten ähnlich. Ein Gleiter kann auch animiert bewegt werden. Dies stellt man in den Eigenschaften in der Rubrik Darstellung ein. Die Animation wird unter „Objekte: Animation“ gestartet und beendet. Der Gleiter bewegt sich dann zum Beispiel auf der Geraden. Die Punkte der Abbildungs-Spur, die durch die Bewegung des Gleiters erzeugt wird haben dann einen definierten Abstand voneinander. Dieser Abstand kann bei den Objekteigenschaften () individuell eingestellt werden.

Viertens kann man natürlich auch zwei Punkte der Geraden spiegeln und die Spiegelpunkte zur gespiegelten Geraden verbinden.

Konstruktion einer Schrägspiegelung

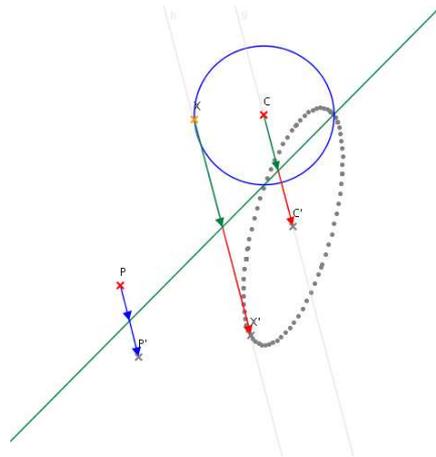


Abbildung 2: Bild eines Kreises unter einer Schrägspiegelung

Kennzeichen einer Schrägspiegelung:

- Analytische Beschreibung

Die Projektionsstrahlen (Verbindungsgeraden entsprechender Punkte) sind parallel und schneiden die Affinitätsachse (Spiegelgerade; x_1 -Achse), die x_2 -Achse ist beliebig. Die Koordinatenform lautet:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\x'_2 &= -x_2 .\end{aligned}$$

- Geometrische Beschreibung

Es sind eine Spiegelgerade g und eine dazu nichtparallele Richtung v vorgegeben. Den Bildpunkt X' eines Punktes X erhält man wie folgt: Konstruiere die Gerade h durch X mit Richtung v . Sei S der Schnittpunkt von h mit g , dann ist X' der Spiegelpunkt von X an S .

Aufgabe

- Geben Sie sich eine Spiegelgerade, eine Richtung und einen Punkt X vor.
- Konstruieren Sie den Spiegelpunkt X' bezüglich der zugehörigen Schrägspiegelung.
- Können Sie das Spiegelbild eines Kreises zeichnen? Nutzen Sie dazu die Objekte „Spur“ in Verbindung mit „Animation“ oder „Spurkurve“.
- Führen Sie die Konstruktion auch gemäß der analytischen Beschreibung durch.

Finale: Führen Sie eine animierte Schrägspiegelung eines Kreises durch und lassen Sie sich anschließend die Spurkurve anzeigen.

Mögliche Lösungen sind in Abbildung 2 und 3 dargestellt.

Diese Anwendung bietet eine Möglichkeit neue Objekte, wie Ellipsen, einzuführen.

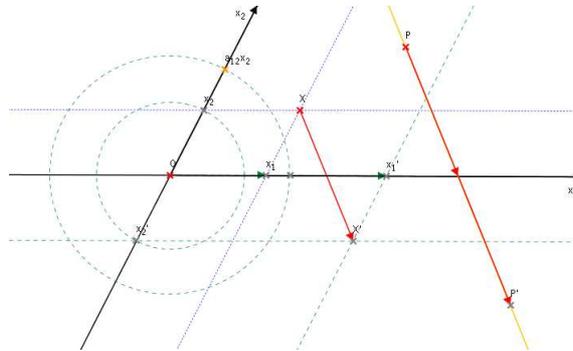


Abbildung 3: Schrägspiegelung: Analytische und geometrische Konstruktion im Vergleich

Thematisch ähnliche Aufgaben

- Scherung
- Eulersche Affinität

5 Das GEONE_xT-Algebrasystem

GEONE_xT ermöglicht zum einen die Ausgabe von bestimmten Messgrößen wie z.B.

$\text{Sin}(X(A))$: Der Sinus der x-Koordinate des Punktes A,

Die 2-Norm der Ortskoordinaten des Punktes A,

aber auch die Definition neuer Punkte an Hand solcher FormelAusdrücke in den Koordinaten der Punkte und mit Hilfe von Zahlen (1, 2, 3.4, 5/6, Pi, E, Pi/2, ...) und Operatoren (+, -, *, /, Sin(), Cos(), Exp(), ...). Winkel werden dabei automatisch dem Bogenmaß oder dem Gradsystem zugeordnet, so ist für GEONE_xT $\text{Sin}(\text{Pi}/2)=\text{Sin}(90)$. Die Groß- und Kleinschreibung ist hier besonders zu beachten, nur Sin() ist möglich, nicht aber SIN() oder sin().

Eine konkrete Anwendungsmöglichkeit stellt die Konstruktion zur Einführung der Ableitung der Sinus-Funktion (Abbildung 4) oder aber anderer Ableitungen, wie etwa der von einer quadratischen Funktion (Abbildung 5), dar.

Der Punkt P' wird mit Hilfe des Differenzenquotienten und dem Objekt „(x,y)-Punkt“ konstruiert. Die Größe von δ bestimmt dabei, wie weit man sich der Tangente im Punkt P nähert. Interessant ist es, die „Spurgeraden“ für verschiedene δ zu vergleichen.

Weitere Aufgaben

Die Ableitungen beliebiger Polynome und rationaler Funktionen, wie x^3 und $1/x$, kann in ähnlicher Weise untersucht werden. Zum Thema Kegelschnitte können zum Beispiel Ellipsen und Parabeln als Fadenkonstruktion dargestellt werden.

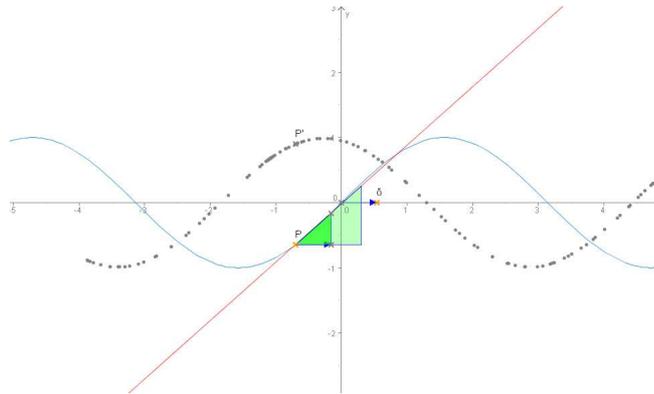


Abbildung 4: Ableitung des Sinus

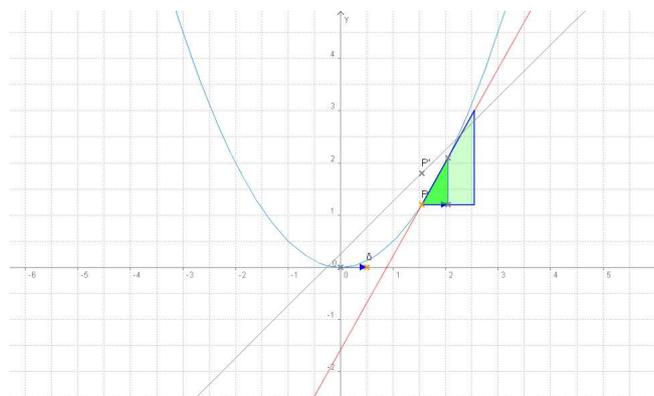


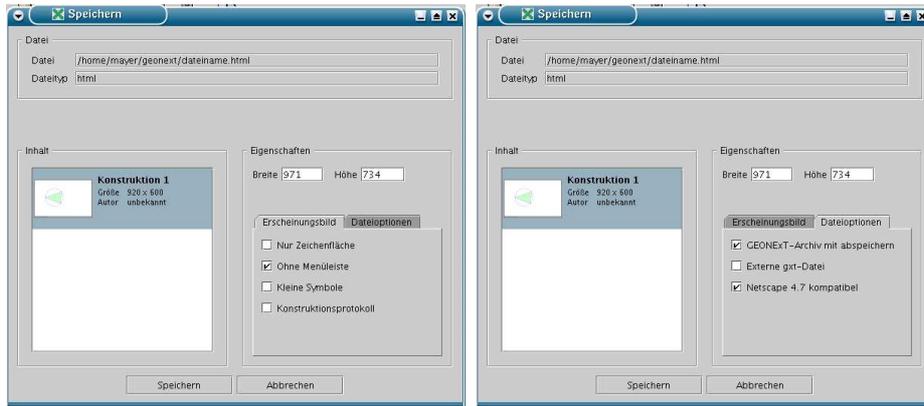
Abbildung 5: Ableitung von x^2

6 Arbeitsblätter / Lernumgebung für Schüler

- a) Graphiken, die mit GEONE_xT erstellt wurden, können sowohl über die Zwischenablage oder aber auch durch Speichern der Graphik als .png-Datei („Datei / Exportieren / PNG“) in jedes Textverarbeitungs- oder Graphik-Programm eingefügt werden. So entstehen ohne Aufwand Papier-Arbeitsblätter für den Unterricht.
- b) GEONE_xT-Konstruktionen können auch als .html-Datei gespeichert werden („Datei / Exportieren / HTML“). Zuerst werden Sie nach dem Dateinamen gefragt, unter dem Sie die html-Datei ablegen wollen. Wenn Sie einen Dateinamen eingegeben und bestätigt haben, so erscheint eine neue Eingabemaske.

Sie haben mehrere Felder zur Wahl:

- „Nur Zeichenfläche“ ist für kleine Konstruktionen, in denen die Schüler nur einige Punkte bewegen, aber keine neuen Objekte generieren können.
- „Ohne Menüleiste“ dient dazu, mit der Menüleiste auch alle dort vorhandenen Konstruktionen auszublenden. Schränkt man vorher in der Menüleiste unter „Bearbeiten



/ Einstellungen“ die aktive Symbolleiste ein, können von den Schülern nur wenige ausgewählte Konstruktionselemente genutzt werden. So kann z.B. zur Übung der Konstruktion der Mittelsenkrechten der fertige GEONExT-Befehl „Mittelsenkrechte“ aus der Symbolleiste herausgenommen werden.

- „Kleine Symbole“.
- „Konstruktionsprotokoll“ setzt eine Liste der zur Konstruktion verwendeten Befehle hinter die Konstruktion.

Unter dem Reiter „Dateioptionen“ können Sie weiter wählen:

- „GEONExT-Archiv mit abspeichern“: Das sollten Sie wählen, um eine auch ohne GEONExT lesbare Datei zu erzeugen.
- „Externe gxt-Datei“: Das kann das Editieren der html-Datei vereinfachen, da eine Datei die GEONExT-Konstruktion enthält, während eine andere Datei die html-Elemente bereitstellt.
- „Netscape 1.7 kompatibel“
- „GEONExT Pfad“ (Im Bild unsichtbar, da das erste Kästchen abgehakt ist): Wenn Sie das GEONExT-Archiv nicht mit abspeichern, brauchen Sie eine verfügbare GEONExT-Installation, deren Pfad Sie hier eingeben müssen.

Die so erstellte Datei können Sie nun in jedem graphischen Internetbrowser betrachten und ins Netz stellen¹. Zur Aufbereitung der html-Dateien bieten sich etliche Editoren an, so etwa Microsoft Word für Microsoft Windows, OpenOffice oder Quanta Plus für Linux. Die Textverarbeitungsprogramme (Word, OpenOffice) erlauben dabei eine Bearbeitung der dynamischen Arbeitsblätter ohne html-Kenntnisse.

- c) Es ist auch möglich eine html-Diashow zu erstellen („Datei / Exportieren / Diashow“), dafür müssen die einzelnen gewünschten Bilder während der Konstruktion als „Screenshot“ im Menü „Zeichenfläche“ abgespeichert werden.

¹Stellen Sie alle hierzu nötigen Dateien mit ins Netz, d.h. die html-Datei selbst, die Datei geonext.jar und evtl. die externe gxt-Datei.