

# Inhaltsverzeichnis

|   |            |
|---|------------|
| <b>Vorwort</b>                                      | <b>144</b> |
| <b>VII Das RIEMANN-Integral</b>                     | <b>145</b> |
| §1 Der Begriff des RIEMANN-Integrals . . . . .      | 145        |
| §2 Integration und Differentiation . . . . .        | 158        |
| §3 Uneigentliche Integrale . . . . .                | 164        |
| §4 Die Gamma-Funktion . . . . .                     | 171        |
| <b>VIII Folgen und Reihen von Funktionen</b>        | <b>175</b> |
| §1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz . . . . . | 175        |
| §2 Vertauschungssätze . . . . .                     | 180        |
| §3 Anwendungen . . . . .                            | 185        |
| <b>IX Normierte Vektorräume</b>                     | <b>190</b> |
| §1 Topologie normierter Vektorräume . . . . .       | 190        |
| §2 Konvergenz und Vollständigkeit . . . . .         | 196        |
| §3 Stetige Funktionen . . . . .                     | 201        |
| §4 Kompakte und zusammenhängende Mengen . . . . .   | 208        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>X</b>  | <b>Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math></b> | <b>216</b> |
| §1        | Partielle Differenzierbarkeit . . . . .                  | 216        |
| §2        | Total Differenzierbarkeit . . . . .                      | 223        |
| §3        | TAYLORSche Formel . . . . .                              | 230        |
| §4        | Lokale Extrema . . . . .                                 | 234        |
| §5        | Implizite Funktionen . . . . .                           | 237        |
| <b>XI</b> | <b>Kurven und Integrale</b>                              | <b>248</b> |
| §1        | Kurven und Bogenlängen . . . . .                         | 248        |
| §2        | Wegintegrale . . . . .                                   | 254        |
| §3        | Parameterabhängige Integrale . . . . .                   | 258        |
| §4        | Matrix-Exponential . . . . .                             | 263        |
|           | <b>Symboerverzeichnis</b>                                | <b>269</b> |
|           | <b>Index</b>   | <b>271</b> |

# Symbolverzeichnis

|                                     |   |     |
|-------------------------------------|---|-----|
| $\ \cdot\ $                         | Norm  | 191 |
| $\ x\ _2$                           | euklidische Norm des Vektors $x$                                | 191 |
| $\ x\ _p$                           | $p$ -Norm des Vektors $x$                                       | 192 |
| $\ x\ _\infty$                      | Maximumsnorm des Vektors $x$                                    | 192 |
| $\ f\ _D$                           | Supremumsnorm der Funktion $f$                                  | 177 |
| $\ f\ _\infty$                      | Supremumsnorm der Funktion $f$                                  | 192 |
| $\ T\ _2$                           | euklidische Norm der Matrix $T$                                 | 230 |
| $\ T\ _\infty$                      | Supremumsnorm der Matrix $T$                                    | 230 |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$      | Skalarprodukt   | 190 |
| $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ | euklidischer Vektorraum   | 190 |
| $(V, \ \cdot\ )$                    | normierter Vektorraum   | 191 |
| $f \leq g$                          | Vergleich von Funktionen  | 147 |
| $f_n \rightarrow f$                 | Punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n \geq 1}$ gegen $f$          | 175 |
| $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$    | Gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \geq 1}$ gegen $f$        | 175 |
| $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$        | Funktionenreihe   | 178 |
| $\int_a^{b*} f(x) dx$               | Oberintegral von $f$  | 148 |
| $\int_{a*}^b f(x) dx$               | Unterintegral von $f$   | 148 |
| $\int_a^b f(x) dx$                  | RIEMANN-Integral von $f$ über $[a; b]$                          | 151 |
| $\int f(x) dx$                      | Unbestimmtes Integral von $f$                                   | 161 |
| $\int_a^\infty f(x) dx$             | uneigentliches RIEMANN-Integral von $f$ auf $[a, \infty)$       | 164 |
| $\int_{-\infty}^b f(x) dx$          | uneigentliches RIEMANN-Integral von $f$ auf $(-\infty, b]$      | 165 |
| $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$     | uneigentliches RIEMANN-Integral von $f$ auf $(-\infty, \infty)$ | 165 |
| $\int_\gamma f dx$                  | Wegintegral von $f$ längs $\gamma$                              | 254 |
| $\mathcal{C}([a; b])$               | Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a; b]$                 | 192 |

---

|                                      |   |     |
|--------------------------------------|---|-----|
| $\Delta$                             | LAPLACE-Operator  | 222 |
| $\partial M$                         | Rand von $M$  | 194 |
| $\frac{\partial F}{\partial x_k}(a)$ | partielle Ableitung von $F$ nach $x_k$ in $a$                   | 216 |
| $d(x, A)$                            | Abstand des Punktes $x$ von der Menge $A$                       | 205 |
| $d(A, B)$                            | Abstand der Mengen $A$ und $B$                                  | 210 |
| $\operatorname{div} F$               | Divergenz von $F$   | 219 |
| $D_k F(a)$                           | partielle Ableitung von $F$ nach der $k$ -ten Koordinate in $a$ | 216 |
| $(DF)(a)$                            | Funktionalmatrix von $F$ an der Stelle $a$                      | 225 |
| $(D_v F)(a)$                         | Richtungsableitung von $F$ in $a$ in Richtung $v$               | 229 |
| $\exp(A)$                            | Matrix-Exponentialfunktion                                      | 263 |
| $f_+$                                | positiver Anteil von $f$  | 155 |
| $f_-$                                | negativer Anteil von $f$  | 155 |
| $\Gamma(x)$                          | Gamma-Funktion  | 172 |
| $\operatorname{grad} f$              | Gradient von $f$  | 219 |
| $\operatorname{Hess} f$              | HESSE-Matrix von $f$  | 233 |
| $K_r(x)$                             | offene Kugel um $x$ mit Radius $r$                              | 192 |
| $L(\gamma)$                          | Bogenlänge der Kurve $\gamma$                                   | 248 |
| $\overset{\circ}{M}$                 | Inneres von $M$   | 194 |
| $\overline{M}$                       | Abschluss von $M$   | 194 |
| $T[a; b]$                            | Vektorraum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$                   | 146 |
| $\operatorname{Var}(\varphi)$        | Totalvariation der Funktion $\varphi$                           | 249 |
| $\zeta(\alpha)$                      | RIEMANNSche Zetafunktion  | 169 |

# Index

- ABELScher Grenzwertsatz, 187
- abgeschlossene Hülle einer Menge, 194
- abgeschlossene Menge, 194
- Ableitung
  - partielle, 216
- Abschluss einer Menge, 194
- Abstand
  - eines Punktes von einer Menge, 205
  - zweier Mengen, 210
- Äquivalenz der Normen auf  $\mathbb{R}^n$ , 200
- ARZELA-ASCOLI, Auswahlsatz von, 185
- BANACH-Raum, 199
- BANACHscher Fixpunktsatz, 204
- BERNSTEIN-Polynome, 188
- beschränkte Folge, 196
- beschränkte Menge, 194
- beschränkte Variation, 249
- beschränkt
  - gleichgradig, 180
- Bogenlänge, 248
- CAUCHY-Folge, 196
- CAUCHY-Kriterium
  - für Funktionenfolgen, 177
  - für Funktionenreihen, 179
  - für uneigentliche Integrale, 166, 171
- CAUCHY-SCHWARzsche Ungleichung, 158, 190
- definit, 235
- Differential, 225
- Differenzierbarkeit
  - partielle, 216
  - stetig partielle, 217
  - stetige, 227
  - totale, 223
- DIRICHLETsche Sprungfunktion, 149, 151
- divergente Folge, 197
- Divergenz, 219
- Dreiecksungleichung, 158, 191
- Ellipse, 248
- euklidische Norm, 191
- euklidischer Vektorraum, 190
- Exponentialfunktion, 264
- Extremum
  - lokales, 235
- Fixpunkt, 204
- Fixpunktsatz
  - BANACHscher, 204
- Folge, 196
- folgenkomakte Menge, 208
- Folgenkriterium der Stetigkeit, 202
- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 160, 161
  - für Wegintegrale, 256
- Funktional
  - lineares, 147, 155
- Funktionalmatrix, 225
- Funktionenfolge, 175, 206
- Funktionenreihe, 178
- Gamma-Funktion, 172
  - Produktdarstellung, 173
- Gebiet, 215
- geometrische Reihe, 181
- geschlossene Kurve, 248
- gleichgradig beschränkt, 180
- gleichgradig stetig, 185
- gleichmäßig konvergent, 175, 178, 206
- gleichmäßig stetig, 201
- Gradient, 219
- Gradientenfeld, 257
- Grenzfunktion, 175

- Grenzwert, 197
- Häufungspunkt einer Menge, 194
- harmonisch, 222
- HAUSDORFFSches Trennungsaxiom, 193
- HESSE-Matrix, 233
- HÖLDERSche Ungleichung, 156
- indefinit, 235
- Innengebiet einer JORDAN-Kurve, 258
- innerer Punkt einer Menge, 193
- Inneres einer Menge, 194
- Integral, 151
- unbestimmtes, 161
  - uneigentliches, 165, 169, 170
- Integral-Vergleichskriterium für Reihen, 168
- Integrationsmethoden
- partielle Integration, 161
  - Substitution, 162
- integrierbar, 151
- uneigentlich, 164, 169
- isolierter Punkt einer Menge, 194
- JACOBI-Matrix, 225
- JORDAN-Kurve, 258
- JORDANScher Kurvensatz, 258
- Kettenregel, 228
- kompakte Menge, 208
- Kontraktion, 204
- konvergente Folge, 196
- Konvergenz
- gleichmäßige, 175, 178, 206
  - im normierten Vektorraum, 196
  - lokal gleichmäßige, 186, 206
  - punktweise, 175, 178, 206
- konvexe Menge, 260
- Kreis, 248
- Kurve, 212, 248
- kurvenzusammenhängend, 212
- LAGRANGESche Multiplikatoren, 245
- Länge
- einer Kurve, 248
- LAPLACE-Operator, 222
- Limes, 197
- LIPSCHITZ-Stetigkeit, 204
- logarithmisch konvex, 172
- lokal gleichmäßig konvergent, 186, 206
- lokales Extremum, 235
- unter einer Nebenbedingung, 245
- lokales Maximum, 234
- lokales Minimum, 234
- Majorantenkriterium
- für Funktionenreihen, 179
- Matrix-Exponential, 263
- Maximum
- lokales, 234
- Maximumsnorm, 192
- Minimum
- lokales, 234
- Mittelwertsatz
- der Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , 230
  - der Integralrechnung, 158
  - verallgemeinerter, 159
- Multiindex, 232
- negativ definit, 235
- negativ semidefinit, 235
- Norm, 191
- euklidische, 191
  - Maximumsnorm, 192
  - $p$ -Norm, 192
- normierter Vektorraum, 191
- Nullfolge, 197
- Oberintegral, 148
- offene Überdeckung, 208
- offene Abbildung, 241
- offene Kugel, 192
- offene Menge, 194
- offener Kern einer Menge, 194
- $p$ -Norm, 192
- parameterabhängige Integrale, 258
- Parametertransformation, 256
- Partialsummenfunktion, 178
- partiell differenzierbar, 216
- mehrfach, 220
- partielle Ableitung, 216
- partielle Integration, 161

- PEANO-Kurve, 258  
Polarkoordinaten  
räumliche, 241  
Polygon, 215  
Polynom, 202  
positiv definit, 235  
positiv semidefinit, 235  
Produktregel, 219  
Projektion, 202  
punktweise konvergent, 175, 178, 206
- Rand einer Menge, 194  
Randpunkt einer Menge, 194  
rationale Funktion, 202  
Raum  
normierter, 191  
rektifizierbar, 248  
Restglied von TAYLOR, 163  
Richtungsableitung, 229  
RIEMANN-Integral, 151  
für Treppenfunktionen, 147  
uneigentliches, 165, 170  
RIEMANN-integrierbar, 151  
RIEMANNSche Summe, 158  
RIEMANNSche Treppenfunktion, 146  
RIEMANNSche Zetafunktion, 169, 180  
Rotationsparabel, 203
- Satz  
über implizite Funktionen, 241  
über lokale Extrema mit Nebenbedingungen, 245  
von BOHR, 173  
von BOLZANO-WEIERSTRASS, 199  
von HEINE-BOREL, 211  
von SCHWARZ, 221  
von TAYLOR, 163  
semidefinit, 235  
Skalarprodukt, 190  
Stammfunktion, 159  
stetig differenzierbar, 227  
stückweise, 252  
stetig partiell differenzierbar, 217  
mehrfach, 220  
stetige Abbildung, 201
- Stetigkeit, 201  
der Norm, 205  
der Projektionen, 202  
gleichgradige, 185  
gleichmäßige, 201  
linearer Abbildungen, 203  
rationaler Funktionen, 202  
von Polynomen, 202
- Strecke, 248  
stückweise stetig differenzierbar, 252  
Substitution, 162  
Supremumsnorm, 177
- Tangentenvektor, 252  
TAYLOR-Reihe, 188  
TAYLORSche Formel, 232  
total differenzierbar, 223  
Totalvariation, 249  
Treppenfunktion, 146
- Umgebung eines Punktes, 193  
unbestimmtes Integral, 161  
uneigentlich absolut integrierbar, 165  
uneigentlich RIEMANN-integrierbar, 164, 169  
Ungleichung  
CAUCHY-SCHWARzsche, 158, 190  
HÖLDERSche, 156  
Unterintegral, 148
- Vektorraum  
euklidischer, 190  
normierter, 191  
vollständiger, 199  
Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung, 159
- Vergleichskriterium  
für uneigentliche Integrale, 166, 171  
Integral-Vergleichskriterium für Reihen, 168
- Vertauschungssätze  
für Beschränktheit, 180  
für Integrierbarkeit, 182  
für Stetigkeit, 181, 184
- vollständiger Vektorraum, 199
- Weg, 252

- entgegengesetzter, 255
- zusammengesetzter, 255
- Wegintegral, 254
- wegzusammenhängend, 212
- WEIERSTRASSscher Approximationssatz, 189
- WEIERSTRASSsches Majorantenkriterium, 179
- Zerlegung, 146
- zusammenhängend, 213
- Zykloide, 254