

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	144
VII	Das RIEMANN-Integral	145
§1	Der Begriff des RIEMANN-Integrals	145
§2	Integration und Differentiation	158
§3	Uneigentliche Integrale	164
§4	Die Gamma-Funktion	171
VIII	Folgen und Reihen von Funktionen	175
§1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	175
§2	Vertauschungssätze	180
§3	Anwendungen	185
IX	Normierte Vektorräume	190
§1	Topologie normierter Vektorräume	190
§2	Konvergenz und Vollständigkeit	196
§3	Stetige Funktionen	201
§4	Kompakte und zusammenhängende Mengen	208

X	Differentialrechnung in \mathbb{R}^n	216
§1	Partielle Differenzierbarkeit	216
§2	Totale Differenzierbarkeit	223
§3	TAYLORSche Formel	230
§4	Lokale Extrema	234
§5	Implizite Funktionen	237
 XI	 Kurven und Integrale	 248
§1	Kurven und Bogenlängen	248
§2	Wegintegrale	254
§3	Parameterabhängige Integrale	258
§4	Matrix-Exponential	263
	 Symbolverzeichnis	 269
	 Index	 271

Symbolverzeichnis

$\ \cdot\ $	Norm	191
$\ x\ _2$	euklidische Norm des Vektors x	191
$\ x\ _p$	p -Norm des Vektors x	192
$\ x\ _\infty$	Maximumsnorm des Vektors x	192
$\ f\ _D$	Supremumsnorm der Funktion f	177
$\ f\ _\infty$	Supremumsnorm der Funktion f	192
$\ T\ _2$	euklidische Norm der Matrix T	230
$\ T\ _\infty$	Supremumsnorm der Matrix T	230
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt	190
$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	euklidischer Vektorraum	190
$(V, \ \cdot\)$	normierter Vektorraum	191
$f \leq g$	Vergleich von Funktionen	147
$f_n \rightarrow f$	Punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n \geq 1}$ gegen f	175
$f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$	Gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \geq 1}$ gegen f	175
$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$	Funktionenreihe	178
$\int_a^{b*} f(x) dx$	Oberintegral von f	148
$\int_{a*}^b f(x) dx$	Unterintegral von f	148
$\int_a^b f(x) dx$	RIEMANN-Integral von f über $[a; b]$	151
$\int f(x) dx$	Unbestimmtes Integral von f	161
$\int_a^\infty f(x) dx$	uneigentliches RIEMANN-Integral von f auf $[a, \infty)$	164
$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	uneigentliches RIEMANN-Integral von f auf $(-\infty, b]$	165
$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$	uneigentliches RIEMANN-Integral von f auf $(-\infty, \infty)$	165
$\int_\gamma f dx$	Wegintegral von f längs γ	254
$\mathcal{C}([a; b])$	Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a; b]$	192

Δ	LAPLACE-Operator	222
∂M	Rand von M	194
$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a)$	partielle Ableitung von F nach x_k in a	216
$d(x, A)$	Abstand des Punktes x von der Menge A	205
$d(A, B)$	Abstand der Mengen A und B	210
$\operatorname{div} F$	Divergenz von F	219
$D_k F(a)$	partielle Ableitung von F nach der k -ten Koordinate in a	216
$(DF)(a)$	Funktionalmatrix von F an der Stelle a	225
$(D_v F)(a)$	Richtungsableitung von F in a in Richtung v	229
$\exp(A)$	Matrix-Exponentialfunktion	263
f_+	positiver Anteil von f	155
f_-	negativer Anteil von f	155
$\Gamma(x)$	Gamma-Funktion	172
$\operatorname{grad} f$	Gradient von f	219
$\operatorname{Hess} f$	HESSE-Matrix von f	233
$K_r(x)$	offene Kugel um x mit Radius r	192
$L(\gamma)$	Bogenlänge der Kurve γ	248
$\overset{\circ}{M}$	Inneres von M	194
\overline{M}	Abschluss von M	194
$T[a; b]$	Vektorraum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$	146
$\operatorname{Var}(\varphi)$	Totalvariation der Funktion φ	249
$\zeta(\alpha)$	RIEMANNSche Zetafunktion	169

Index

- ABELscher Grenzwertsatz, 187
- abgeschlossene Hülle einer Menge, 194
- abgeschlossene Menge, 194
- Ableitung
 - partielle, 216
- Abschluss einer Menge, 194
- Abstand
 - eines Punktes von einer Menge, 205
 - zweier Mengen, 210
- Äquivalenz der Normen auf \mathbb{R}^n , 200
- ARZELA-ASCOLI, Auswahlssatz von, 185

- BANACH-Raum, 199
- BANACHscher Fixpunktsatz, 204
- BERNSTEIN-Polynome, 188
- beschränkte Folge, 196
- beschränkte Menge, 194
- beschränkte Variation, 249
- beschränkt
 - gleichgradig, 180
- Bogenlänge, 248

- CAUCHY-Folge, 196
- CAUCHY-Kriterium
 - für Funktionenfolgen, 177
 - für Funktionenreihen, 179
 - für uneigentliche Integrale, 166, 171
- CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, 158, 190

- definit, 235
- Differential, 225
- Differenzierbarkeit
 - partielle, 216
 - stetig partielle, 217
 - stetige, 227
 - totale, 223
- DIRICHLETSche Sprungfunktion, 149, 151

- divergente Folge, 197
- Divergenz, 219
- Dreiecksungleichung, 158, 191

- Ellipse, 248
- euklidische Norm, 191
- euklidischer Vektorraum, 190
- Exponentialfunktion, 264
- Extremum
 - lokales, 235

- Fixpunkt, 204
- Fixpunktsatz
 - BANACHscher, 204
- Folge, 196
- folgenkompakte Menge, 208
- Folgenkriterium der Stetigkeit, 202
- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 160, 161
 - für Wegintegrale, 256
- Funktional
 - lineares, 147, 155
- Funktionalmatrix, 225
- Funktionenfolge, 175, 206
- Funktionenreihe, 178

- Gamma-Funktion, 172
 - Produktdarstellung, 173
- Gebiet, 215
- geometrische Reihe, 181
- geschlossene Kurve, 248
- gleichgradig beschränkt, 180
- gleichgradig stetig, 185
- gleichmäßig konvergent, 175, 178, 206
- gleichmäßig stetig, 201
- Gradient, 219
- Gradientenfeld, 257
- Grenzfunktion, 175

- Grenzwert, 197
- Häufungspunkt einer Menge, 194
- harmonisch, 222
- HAUSDORFFSches Trennungsaxiom, 193
- HESSE-Matrix, 233
- HÖLDERSche Ungleichung, 156
- indefinit, 235
- Innengebiet einer JORDAN-Kurve, 258
- innerer Punkt einer Menge, 193
- Inneres einer Menge, 194
- Integral, 151
 - unbestimmtes, 161
 - uneigentliches, 165, 169, 170
- Integral-Vergleichskriterium für Reihen, 168
- Integrationsmethoden
 - partielle Integration, 161
 - Substitution, 162
- integrierbar, 151
 - uneigentlich, 164, 169
- isolierter Punkt einer Menge, 194
- JACOBI-Matrix, 225
- JORDAN-Kurve, 258
- JORDANScher Kurvensatz, 258
- Kettenregel, 228
- kompakte Menge, 208
- Kontraktion, 204
- konvergente Folge, 196
- Konvergenz
 - gleichmäßige, 175, 178, 206
 - im normierten Vektorraum, 196
 - lokal gleichmäßige, 186, 206
 - punktweise, 175, 178, 206
- konvexe Menge, 260
- Kreis, 248
- Kurve, 212, 248
- kurvenzusammenhängend, 212
- LAGRANGESche Multiplikatoren, 245
- Länge
 - einer Kurve, 248
- LAPLACE-Operator, 222
- Limes, 197
- LIPSCHITZ-Stetigkeit, 204
- logarithmisch konvex, 172
- lokal gleichmäßig konvergent, 186, 206
- lokales Extremum, 235
 - unter einer Nebenbedingung, 245
- lokales Maximum, 234
- lokales Minimum, 234
- Majorantenkriterium
 - für Funktionenreihen, 179
- Matrix-Exponential, 263
- Maximum
 - lokales, 234
- Maximumsnorm, 192
- Minimum
 - lokales, 234
- Mittelwertsatz
 - der Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , 230
 - der Integralrechnung, 158
 - verallgemeinerter, 159
- Multiindex, 232
- negativ definit, 235
- negativ semidefinit, 235
- Norm, 191
 - euklidische, 191
 - Maximumsnorm, 192
 - p -Norm, 192
- normierter Vektorraum, 191
- Nullfolge, 197
- Oberintegral, 148
- offene Überdeckung, 208
- offene Abbildung, 241
- offene Kugel, 192
- offene Menge, 194
- offener Kern einer Menge, 194
- p -Norm, 192
- parameterabhängige Integrale, 258
- Parametertransformation, 256
- Partiellsummenfunktion, 178
- partiell differenzierbar, 216
 - mehrfach, 220
- partielle Ableitung, 216
- partielle Integration, 161

- PEANO-Kurve, 258
- Polarkoordinaten
 - räumliche, 241
- Polygon, 215
- Polynom, 202
- positiv definit, 235
- positiv semidefinit, 235
- Produktregel, 219
- Projektion, 202
- punktweise konvergent, 175, 178, 206

- Rand einer Menge, 194
- Randpunkt einer Menge, 194
- rationale Funktion, 202
- Raum
 - normierter, 191
- rektifizierbar, 248
- Restglied von TAYLOR, 163
- Richtungsableitung, 229
- RIEMANN-Integral, 151
 - für Treppenfunktionen, 147
 - uneigentliches, 165, 170
- RIEMANN-integrierbar, 151
- RIEMANNsche Summe, 158
- RIEMANNsche Treppenfunktion, 146
- RIEMANNsche Zetafunktion, 169, 180
- Rotationsparabel, 203

- Satz
 - über implizite Funktionen, 241
 - über lokale Extrema mit Nebenbedingungen, 245
 - von BOHR, 173
 - von BOLZANO-WEIERSTRASS, 199
 - von HEINE-BOREL, 211
 - von SCHWARZ, 221
 - von TAYLOR, 163
- semidefinit, 235
- Skalarprodukt, 190
- Stammfunktion, 159
- stetig differenzierbar, 227
 - stückweise, 252
- stetig partiell differenzierbar, 217
 - mehrfach, 220
- stetige Abbildung, 201

- Stetigkeit, 201
 - der Norm, 205
 - der Projektionen, 202
 - gleichgradige, 185
 - gleichmäßige, 201
 - linearer Abbildungen, 203
 - rationaler Funktionen, 202
 - von Polynomen, 202
- Strecke, 248
- stückweise stetig differenzierbar, 252
- Substitution, 162
- Supremumsnorm, 177

- Tangentenvektor, 252
- TAYLOR-Reihe, 188
- TAYLORSche Formel, 232
- total differenzierbar, 223
- Totalvariation, 249
- Treppenfunktion, 146

- Umgebung eines Punktes, 193
- unbestimmtes Integral, 161
- uneigentlich absolut integrierbar, 165
- uneigentlich RIEMANN-integrierbar, 164, 169
- Ungleichung
 - CAUCHY-SCHWARZsche, 158, 190
 - HÖLDERSche, 156
- Unterintegral, 148

- Vektorraum
 - euklidischer, 190
 - normierter, 191
 - vollständiger, 199
- Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung, 159
- Vergleichskriterium
 - für uneigentliche Integrale, 166, 171
 - Integral-Vergleichskriterium für Reihen, 168
- Vertauschungssätze
 - für Beschränktheit, 180
 - für Integrierbarkeit, 182
 - für Stetigkeit, 181, 184
- vollständiger Vektorraum, 199

- Weg, 252

entgegengesetzter, 255

zusammengesetzter, 255

Wegintegral, 254

wegzusammenhängend, 212

WEIERSTRASSscher Approximationssatz, 189

WEIERSTRASSches Majorantenkriterium, 179

Zerlegung, 146

zusammenhängend, 213

Zykloide, 254