

Inhaltsverzeichnis

XXII	Der RIEMANNsche Abbildungssatz	510
§1	Automorphismen	510
§2	Holomorphie im Unendlichen	512
§3	MÖBIUS-Transformationen	514
§4	Folgen holomorpher Funktionen	520
§5	Der RIEMANNsche Abbildungssatz	521
XXIII	Analytische Fortsetzung	526
§1	Analytische Fortsetzung längs Kurven	526
§2	Homotopie	533
§3	Einfach zusammenhängende Gebiete	536
XXIV	Harmonische Funktionen	540
§1	Harmonische Funktionen	540
§2	Das DIRICHLET-Problem	544
§3	Die JENSENsche Formel	551
§4	Ganze Funktionen endlicher Ordnung	556

XXV	Approximation und Konstruktion	561
§1	Partialbruchentwicklung	561
§2	Partialbruchentwicklung in beliebigen Gebieten	566
§3	Produktentwicklungen	574
§4	Anwendungen des Produktsatzes	583
§5	Die Gamma-Funktion	587
XXVI	Analytische Zahlentheorie	597
§1	Die analytische Theorie der DIRICHLET-Reihen	597
§2	Der Primzahlsatz	613
§3	Die RIEMANNsche Zetafunktion	625
	Symbolverzeichnis	632
	Index	636

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen, komplexen Zahlen	
(f, D)	Funktionselement	526
$(\gamma_s)_{s \in [0;1]}$	zur Homotopie H gehörige Kurvenschar	533
$(p_n)_{n \geq 1}$	Folge der Partialproduktfunktionen	578
$f(x) \sim g(x)$	f und g sind asymptotisch gleich	614
$G \sim G'$	biholomorphe Äquivalenz	510
$(f_1, D_1) \asymp (f_2, D_2)$	direkte analytische Fortsetzung	526
$(f * g)(n)$	DIRICHLET-Faltung	606
$\gamma_1 \oplus \gamma_2(t)$	aus $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ zusammengesetzte Kurve	536
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$	LANDAUsches Oh-Symbol	602
$\arg(z)$	Argument von z	
$\text{Bih } G$	Gruppe der biholomorphen Automorphismen von G	511
$\text{Bih}_a G$	Fixgruppe der Automorphismen von G bezüglich a	511
\mathbb{C}^*	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	
\mathbb{C}_-	Schlitzebene	
$\hat{\mathbb{C}}$	Kompaktifizierung von \mathbb{C}	512
$\mathbb{C}(z)$	Körper der rationalen Funktionen über \mathbb{C}	
$\mathbb{C}[z]$	Algebra der Polynomfunktionen über \mathbb{C}	
$d(A, B)$	Abstand der Mengen A und B	
$d(x, A)$	Abstand des Punktes x von der Menge A	
Δ	LAPLACE-Operator	540
$D_f(s)$	DIRICHLET-Reihe zu $f(n)$	599
\mathbb{E}	Einheitskreis	510
$\dot{\mathbb{E}}$	punktierter Einheitskreis	517

$E_q(z)$	WEIERSTRASSsche Primfaktoren	579
\mathcal{F}	Familie	523
$f_\alpha(n)$	zahlentheoretische Funktion ($f_\alpha(n) = n^\alpha$)	608
$f'(n)$	formale Ableitung einer Folge	599
$f^{-1}(n)$	DIRICHLET-Inverses zu f	606
γ	EULERSche Konstante	590
$\gamma(t)$	Kurve	
$\gamma^-(t)$	zu $\gamma(t)$ entgegengesetzte Kurve	
$\Gamma(z)$	Gamma-Funktion	587
$\text{ggT}(m, n)$	größter gemeinsamer Teiler von m und n	
$\text{GL}_n(\mathcal{R})$	allgemeine lineare Gruppe über einem Ring \mathcal{R}	
$\text{grad } p$	Grad des Polynoms p	
\mathcal{H}	obere Halbebene	518
$H(f)$	Hauptteilverteilung von f	562
$\mathcal{H}(G)$	Algebra der holomorphen Funktionen auf G	514
$H(s, t)$	Homotopie	533
$\text{Im } z$	Imaginärteil von z	
$\int_\gamma f(z) dz$	Kurvenintegral von f längs $\gamma(t)$	531
$K_r(z)$	offener Kreis um z mit Radius r	
$K_{r,R}(z)$	offener Kreisring um z mit den Radien r und R	
$\Lambda(n)$	VON MANGOLDTsche Λ -Funktion	612
$\ln x$	reeller Logarithmus	
$\log z$	Hauptzweig des Logarithmus	
\overline{M}	Abschluss einer Menge M	
∂M	Rand (auch pos. Randkurve) einer Menge M	
$\sharp M$	Mächtigkeit einer Menge M	
$\overset{\circ}{M}$	Inneres einer Menge M	
$\text{Mat}_n(\mathcal{R})$	$n \times n$ Matrizen über einem Ring \mathcal{R}	
$M_f(R)$	Betragsmaximum von f in $\overline{K_R(0)}$	554
$\mathcal{M}(G)$	Körper der meromorphen Funktionen auf dem Gebiet G	513
$\mu(n)$	MÖBIUSSche μ -Funktion	607
$N_f(R)$	Anzahl der Nullstellen von f in $\overline{K_R(0)}$	554

$n_\gamma(z_0)$	Umlaufzahl von γ bezüglich z_0	532
$o(f)$	(Wachstums-) Ordnung von f	556
$\text{ord}_a(f)$	Ordnung von f an der Stelle a	579
\mathbb{P}	Menge aller Primzahlen	610
P_f	Polstellenmenge von f	512
$\text{PGL}_n(\mathcal{R})$	projektive lineare Gruppe über einem Ring \mathcal{R}	515
ϕ_C	CAYLEY-Transformation	518
ϕ_M	MÖBIUS-Transformation	514
$\varphi(n)$	EULERSche Phi-Funktion	607
$\pi(x)$	Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x	613
P_n	TAYLOR-Polynom vom Grad k_n	563
$\prod_{k=1}^{\infty} z_k$	unendliches Produkt der z_k	574
\prod_p	$= \prod_{p \in \mathbb{P}}$	609
$P_R(\zeta, z)$	POISSON-Kern	544
$\psi(x)$	CHEBYSHEVsche ψ -Funktion	613
$\text{PSL}_n(\mathcal{R})$	spezielle projektive lineare Gruppe über einem Ring \mathcal{R}	520
$\text{Re } z$	Realteil von z	
$\text{Res}_a f$	Residuum von f an der Stelle a	
σ	häufig verwendet als $\text{Re } s$	
$\sigma_a(f)$	absolute Konvergenzabszisse von $D_f(s)$	601
$\sigma_b(f)$	bedingte Konvergenzabszisse von $D_f(s)$	599
$\text{SL}_n(\mathcal{R})$	spezielle lineare Gruppe über einem Ring \mathcal{R}	
$\text{SO}_n(\mathcal{R})$	spezielle orthogonale Gruppe über einem Ring \mathcal{R}	517
$\text{Sp } \gamma$	Spur der Kurve γ	
$\sum_{d n}$	$= \sum_{d n, d \in \mathbb{N}}$	
t	häufig verwendet als $\text{Im } s$	
$\theta(u, v; \tau)$	Theta-Reihe in τ zur Charakteristik (u, v)	625
$\vartheta(x)$	CHEBYSHEVsche ϑ -Funktion	613
$\vartheta(y)$	Thetanullwert	627
u_x	partielle Ableitung von u nach x	
$\mathcal{V}_{a,b}$	Vertikalstreifen mit Grenzen a und b	587
$W(s_0, \alpha)$	Winkelbereich mit Spitze s_0 und Öffnungswinkel 2α	599

x	häufig verwendet als $\operatorname{Re} z$	
$\xi(s)$	$= \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$	627
$\xi^*(s)$	$= s \cdot (s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$	630
y	häufig verwendet als $\operatorname{Im} z$	
$\zeta(s)$	RIEMANNSche Zetafunktion	607

Index

- ABELSches Lemma, 597
- Ableitung
 - einer Folge, 599
 - logarithmische, 579
- absolut gleichmäßige Konvergenz
 - eines Produktes, 578
- analytische Fortsetzung, 526
- Approximationssatz von RUNGE, 571
- Äquivalenzsatz für einfach zusammenhängende Gebiete, 525, 537, 541, 572
- Ausschöpfung durch Kompakta, 570
- Automorphismus
 - biholomorpher, 511
- biholomorph äquivalent, 510
- biholomorpher Automorphismus, 511
- CAUCHYSche Integralformel
 - für harmonische Funktionen, 542
- CAUCHYScher Integralsatz
 - Homotopieversion, 535
- CAYLEY-Transformation, 519
- Charakteristik
 - einer Thetareihe, 625
- CHEBYSHEVSche ψ -Funktion, 613
- CHEBYSHEVSche ϑ -Funktion, 613
- direkte analytische Fortsetzung, 526
- DIRICHLET-Faltung, 606
- DIRICHLET-Inverses, 606
- DIRICHLET-Problem, 546
- DIRICHLET-Reihe, 599
 - absolute Konvergenz, 601
 - bedingte Konvergenz, 599
 - EULER-Produkt, 610
 - Identitätssatz, 608
 - Integraldarstellung für die Koeffizienten, 605
- Logarithmus, 612
- Eindeutigkeitssatz von WIELANDT, 588
- einfach zusammenhängend
 - Äquivalenzsatz, 525, 537, 541, 572
- Einheitskreis, 510
 - punktierter, 517
- endliche Ordnung, 556
- Entwicklungspunkt, 561
- EULER-Produkt, 610
- EULERSche Konstante, 590
- EULERSche Phi-Funktion, 607
- Familie, 523
- Fixgruppe, 511
- Folge
 - multiplikative, 609
- formale Ableitung einer Folge, 599
- Fortsetzung
 - analytische, 526
 - direkte analytische, 526
 - längs einer Kurve, 527
 - meromorphe, 587
- Funktionalgleichung
 - der Γ -Funktion, 587, 592
 - der RIEMANNschen ζ -Funktion, 629
 - der ξ -Funktion, 627
- Funktionenreihe
 - kompakt gleichmäßige Konvergenz, 562
 - lokal gleichmäßige Konvergenz, 562
- Funktionselement, 526
 - Kette von, 527
- Γ -Funktion, 587
 - Funktionalgleichung, 587, 592
 - Integraldarstellung, 587
 - Partialbruchentwicklung, 587
 - Produktdarstellung, 590

- gebrochen-lineare Transformation, 514
- HADAMARDScher Produktsatz, 585
- Halbebene
 - obere, 518
 - rechte, 625
- harmonische Funktion, 540
 - CAUCHYsche Integralformel, 542
 - Folgen, 549
 - Identitätssatz, 543
 - Maximum- und Minimumprinzip, 543
 - Mittelwerteigenschaft, 542
 - Potenzreihendarstellung, 542
- HARNACKSche Ungleichung, 550
- Hauptteil, 561
 - Entwicklungspunkt, 561
- Hauptteilverteilung, 561
 - lösbar, 562
- holomorph in ∞ , 512
- holomorphe Quadratwurzel, 521
- holomorpher Logarithmus, 524
- homöomorph, 537
- Homöomorphismus, 537
- homotop, 533
- Homotopie, 533
- Identitätssatz
 - für DIRICHLET-Reihen, 608
 - für harmonische Funktionen, 543
- Integral
 - längs einer Kurve, 531
- Integraldarstellung
 - der Γ -Funktion, 587
 - der ξ -Funktion, 627
- JENSENSche Formel, 554
- Kette von Funktionselementen, 527
- kompakt gleichmäßige Konvergenz
 - einer Funktionenreihe, 562
- Konvergenz
 - absolut gleichmäßige, 578
 - absolute
 - eines Produktes, 576
 - eines Funktionenproduktes, 578
 - eines Produktes, 574
 - lokal gleichmäßige, 578
- Konvergenz erzeugende Summanden, 562
- Konvergenzabszisse
 - absolute Konvergenz, 601
 - bedingte Konvergenz, 599
- Kreisring, 518
- Kurve
 - Punktkurve, 533
- Kurvenintegral, 531
- Kurvenschar
 - einparametrische, 533
- LEGENDRESche Verdopplungsformel, 592
- Lemma
 - ABELSches Lemma, 597
 - Polverschiebungslemma, 567
 - SCHWARZSches Lemma, 516
- logarithmische Ableitung, 579
- Logarithmus
 - einer DIRICHLET-Reihe, 612
 - holomorpher, 524
- lokal gleichmäßige Konvergenz
 - einer Funktionenreihe, 562
 - eines Produktes, 578
- Lösung
 - einer Hauptteilverteilung, 562
- Maximum- und Minimumprinzip
 - für harmonische Funktionen, 543, 548
- meromorph in ∞ , 512
- meromorphe Fortsetzung, 587
 - der RIEMANNschen ζ -Funktion, 617, 629
- meromorphe Funktion
 - Hauptteil, 561
- Minimumprinzip, *siehe* Maximumprinzip
- Mittelwerteigenschaft
 - für harmonische Funktionen, 542
- MÖBIUSSche μ -Funktion, 607
- MÖBIUS-Transformation, 514
- Monodromiesatz, 536
- multiplikative Folge, 609
 - analytische Version, 609
- nullhomolog, 535
- nullhomotop, 535

- obere Halbebene, 518
- Öffnungswinkel eines Winkelbereichs, 599
- Ordnung
 - einer Funktion, 556
 - endliche, 556
- Partialbruchentwicklung, 563, 566
 - der Γ -Funktion, 587
- POISSON-JENSENSche Formel, 554
- POISSON-Kern, 544
- POISSONSche Integralformel, 544
- Polverschiebungslemma, 567
- Potenzreihendarstellung
 - einer harmonischen Funktion, 542
- Primzahlsatz, 625
- Produkt
 - absolute Konvergenz, 576
 - Konvergenz, 574, 578
- Produktentwicklung, 581
 - der Γ -Funktion, 590
 - des Cosinus, 584
 - des Sinus, 584
 - von WALLIS für π , 584
- Produktsatz von GAUSS, 591
- punktierter Einheitskreis, 517
- Punktkurve, 533
- Quadratwurzel
 - holomorphe, 521
- Quotientenkörper, 583
- rechte Halbebene, 625
- RIEMANNSche Vermutung, 620
- RIEMANNSche ζ -Funktion, 617
 - Funktionalgleichung, 629
 - meromorphe Fortsetzung, 629
 - nicht-triviale Nullstellen, 631
- RIEMANNScher Abbildungssatz, 520, 524
- Satz
 - Eindeutigkeitssatz von WIELANDT, 588
 - HADAMARDScher Produktsatz, 585
 - LEGENDRESche Verdopplungsformel, 592
 - Monodromiesatz, 536
 - Primzahlsatz, 625
 - Produktsatz von GAUSS, 591
 - STIRLINGsche Formel, 594
 - klassische, 595
 - Theta-Transformationsformel, 626
 - von LANDAU, 604
 - von MITTAG-LEFFLER, 572
 - von MONTEL, 521
 - von RUNGE, 571
 - WEIERSTRASSscher Produktsatz, 580
- SCHWARZsches Lemma, 516
- Spitze eines Winkelbereichs, 599
- STIRLINGsche Formel, 594
 - klassische, 595
- summatorische Funktion, 597
- TAYLOR-Polynom, 563
- Theta-Reihe mit Charakteristik, 625
- Theta-Transformationsformel, 626
- Thetanullwert, 627
- transitiv, 525
- Umlaufzahl, 532
- Ungleichung
 - HARNACKsche, 550
- Vertikalstreifen, 587
- VON MANGOLDT'sche Λ -Funktion, 612
- w -Stelle in ∞ , 512
- Wachstumsordnung, 602
- WALLISsche Produktdarstellung für π , 584
- WEIERSTRASSscher Produktsatz, 580
- Windungszahl, 532
- Winkelbereich, 599
- ξ -Funktion
 - Funktionalgleichung, 627
 - Integraldarstellung, 627