LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 07. Mai 2003

2. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie

Abgabe: Montag, 19.05.2003, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (12 Punkte):

a) Sei $L|K$ eine Erweiterung von Zahlkörpern. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $\alpha \in L$

(i) $\alpha \in \mathcal{O}_L$.

(ii) α ist ganz über $\mathcal{O}_K$, d.h. es existiert ein normiertes Polynom $p(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ mit $p(\alpha) = 0$.

(iii) $\mathcal{O}_K[\alpha]$ ist ein endlich erzeugtes $\mathcal{O}_K$-Modul.

(iv) Es existiert ein endlich erzeugtes $\mathcal{O}_K$-Modul $\{0\} \neq \mathcal{M} \subset L$ mit $\alpha \cdot \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

(v) Das Minimalpolynom von α über K liegt in $\mathcal{O}_K[X]$.

b) Als Anwendung sei nun $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Man zeige, dass

$$\mathcal{O}_L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i).$$

Bemerkung: Allgemeine Ergebnisse über Spur und Norm sind **nicht** vorhanden und dürfen dementsprechend nicht benutzt werden.

Aufgabe 2 (12 Punkte):
Es seien die beiden reellen Zahlen

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass α und β ganze Zahlen eines geeigneten Zahlkörpers K sind.

b) Berechnen Sie die Minimalpolynome von α und β über $\mathbb{Q}$.

c) Welche Relation gilt zwischen α und β? (Beachte Aufgabe 3).

d) Enthalten $\mathbb{Q}(\alpha)$ bzw. $\mathbb{Q}(\beta)$ die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$?

e) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$, wobei K der Zerfällungskörper von $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.

Bemerkung: Wen interessiert woher diese Gleichheit kommt und wer Kenntnisse in Algebra besitzt, siehe bitte bei Daniel Shanks, Incredible Identities, The Fibonacci Quaterly 3, **12** (1974), p.271&280, nach.

Aufgabe 3 (6 Punkte):
Sei $p \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $N \geq 2$ und α eine einfache Nullstelle, also

$$p(X) = \sum_{j=1}^{N} c_j (X-\alpha)^j, \quad c_1 \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass alle weiteren Nullstellen β von p mit $\beta \neq \alpha$ gilt:

$$|\beta - \alpha| \geq \frac{|c_1|}{\sum_{j=2}^{N} |c_j|}.$$

Bemerkung: Diese Abschätzung wird häufig in der Dynamik benutzt.