LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 22. Mai 2003

5. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 30. Mai 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(G) \subset L$, so ist f konstant.
Ist dieser Schluß auch noch richtig, wenn auf den Zusammenhang von G verzichtet wird?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Kurven γ_2 Umparametrisierungen der zugehörigen Kurven γ_1 sind:

a) $\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := re^{it}$ und $\gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) := re^{-it}$ mit fixiertem $r > 0$;

b) $\gamma_1 : [1,2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := t^2 - 1$ und $\gamma_2[0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) := t^2 + 2t$.

Aufgabe 3 (5+4 Punkte)

a) Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen, die für den reellen Logarithmus gelten, in $\mathbb{C}$ i. A. nicht mehr gelten:

(i) $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$,
(ii) $\operatorname{Log}(z_1/z_2) = \operatorname{Log}(z_1) - \operatorname{Log}(z_2)$,
(iii) $\operatorname{Log}(z^k) = k \operatorname{Log}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Formulieren Sie für (ii) und (iii) „optimale“ Aussagen, analog zu Satz (4.5) e).

b) Wir definieren nun für $z \in \mathbb{C}^*$ die Menge $\log(z)$ durch

$$\log(z) := \{w \in \mathbb{C};\ w = \operatorname{Log} z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} = \operatorname{Log} z + 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ und $k \in \mathbb{Z}$ folgende Gleichungen gelten:

(i) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ (elementweise Addition),
(ii) $\log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$ (elementweise Subtraktion),
(iii) $\log(z^k) = \{w \in \mathbb{C};\ w = k \operatorname{Log} z + 2\pi i m, m \in \mathbb{Z}\}$.

Zeigen Sie insbesondere, dass i. A. $\log(z^k) \neq k \log(z)$ ist.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

a) $\int_\gamma z^n \, dz$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, wobei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$ sowie $r > 0$ ist.

b) $\int_\gamma z e^{iz^2} \, dz$, wobei γ der Streckenzug von 0 nach i ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Es sei $G := \mathbb{C}_-$. Geben Sie eine auf G holomorphe Funktion g an, für die $g^2(z) = z(z+1)$ für alle $z \in G$ sowie $g(1) = \sqrt{2}$ gilt.

Hinweis. Wir suchen also eine Wurzel von $z(z+1)$. Dabei hilft es schon, wenn man zunächst für die beiden Faktoren eine Wurzel findet und die Funktion g hinterher als Produkt der beiden Teilergebnisse schreibt. Wie ist im reellen Fall der Zusammenhang zwischen Wurzel und allgemeiner Potenz?