LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 10. Juli 2003

11. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 18. Juli 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Ähnlich wie in Aufgabe 6, Blatt 7, sei $\mathcal{H}(G)$ wieder der Ring der auf G holomorphen Funktionen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (vgl. XVIII (3.11)):

a) G ist zusammenhängend, also ein Gebiet.

b) $\mathcal{H}(G)$ ist ein Integritätsring.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\dfrac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf G.

(ii) Es existiert ein holomorpher Logarithmus von f auf G.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Es sei $z = re^{i\theta} \neq 0$ mit $\theta \in (-\pi, \pi]$. Bestimmen Sie den Hauptwert von z^i. Welches ist der Hauptwert von i^i?

Aufgabe 4 (5 Punkte) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ in eine Laurent-Reihe in den Kreisringen

a) $0 < |z| < 2$,   b) $2 < |z| < 3$,   c) $3 < |z|$.

Aufgabe 5 (2+3+3+2 Punkte, für Lehramtskandidaten zum (teilweisen) Vorrechnen)
Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$\mathcal{M} := \{f : U \to \mathbb{C}; U \text{ offene Umgebung von } z_0, f \text{ holomorph}\}$$

die Menge der in z_0 holomorphen Funktionen.

a) Für $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ aus M definiert man

$$f \sim g :\Leftrightarrow \text{Es existiert ein } r > 0 \text{ mit } f|_{K_r(z_0)} = g|_{K_r(z_0)}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ gegeben wird.

Den Raum der Äquivalenzklassen $\mathcal{R} := M/\sim = \{[f]; f \in \mathcal{M}\}$ bezeichnen wir als den Raum der holomorphen Funktionskeime.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ mit den Verknüpfungen

$$[f] + [g] := [f + g], \quad [f] \circ [g] := [f \cdot g], \quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

zu einer kommutativen $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement wird.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein lokaler Ring ist, in dem jedes Ideal außer $\{0\}$ die Form $I_n = ([z - z_0]^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, hat. I_1 ist das eindeutig bestimmte maximale Ideal mit $\mathcal{R}/I_1 \simeq \mathbb{C}$. (Ein *lokaler* Ring ist ein Ring mit nur einem maximalen Ideal.)

d) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathcal{R}$.