LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 24. Juli 2003

Musterlösung der 13. Übung zur Analysis IV

Aufgabe 1 (3 Punkte) Sei g holomorph auf einem Gebiet G mit $\overline{K_1(0)} \subset G$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass die Gleichung $g(z) = z$ genau eine Lösung für $|z| < 1$ hat, falls $|g(z)| < 1$ ist für alle z mit $|z| = 1$.

Lösung Im Satz von Rouché setzen wir $\Gamma = \partial K_1(0)$ und $\tilde{f}(z) = -z$, $\tilde{g}(z) = g(z) - z$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt: $U = G$ ist offen, $\overline{K_1(0)} \subset U$. Γ ist der Randzyklus von $K_1(0)$, $\tilde{f}, \tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ sind holomorph.
Mit $w = 0$ gilt

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{g}(z)| = |g(z)| < 1 = |z| = |\tilde{f}(z) - w| \quad \text{für alle } z \in \partial K_1(0).$$

Also haben $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ die gleiche Anzahl (einschließlich Vielfachheiten) von Nullstellen in $K_1(0)$, also eine (wegen $\tilde{f}(z) = -z$).
Damit gilt auch $\tilde{g}(z) = 0$ genau einmal in $K_1(0)$, also existiert auch genau ein $z \in K_1(0)$ mit $g(z) = z$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

a) Es sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(z) := z + a$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in einer punktierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}_{z_0} g = \operatorname{Res}_{z_0 - a}(g \circ \varphi).$$

b) Sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\phi(z) := az$ für ein $a \in \mathbb{C}^*$. Drücken Sie $\operatorname{Res}_{z_0} g$ durch $\operatorname{Res}_{z_0/a}(g \circ \phi)$ analog zu a) aus.

Lösung

a) Aus der Definition des Residuums folgt mit der Substitution $w = z + a$:

$$\operatorname{Res}_{z_0-a}(g \circ \varphi) = \operatorname{Res}_{z_0-a} g(z+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(z_0-a)} g(z+a)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(z_0) g(w)\, dw} = \operatorname{Res}_{z_0} g$$

mit einem geeigneten $\rho > 0$.

b) Mit der Substitution $w = az$ folgt hier mit geeignetem $\rho > 0$

$$\operatorname{Res}_{z_0/a}(g \circ \phi) = \operatorname{Res}_{z_0/a} g(az) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(z_0/a)} g(az)\, dz = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(z_0)} g(w)\, dw = \frac{1}{a} \operatorname{Res}_{z_0} g,$$

also ergibt sich die Formel

$$\operatorname{Res}_{z_0} g = a \operatorname{Res}_{z_0/a}(g \circ \phi).$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Residuen:

a) $\operatorname{Res}_0 \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, für $n \in \mathbb{Z}$,

b) $\operatorname{Res}_0 \dfrac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}$.

Lösung

a) Wegen $\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{\sin z} = 1$ gilt auch $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^{n-1} z} = 1$, also hat $\dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$ einen einfachen Pol in $z = 0$. Mit Lemma (1.4) b) gilt nun

$$\mathrm{Res}_0 \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^n}{\sin^n z} = 1.$$

b) Sei $g(z) := z-1$ und $h(z) := \mathrm{Log}(z+1)$, also $f = g/h$. g ist holomorph in 0. Wegen $h(0) = 0$ und $h'(0) = \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0$ hat $1/h$ einen einfachen Pol in 0.

Mit (1.4) b) und c) gilt nun

$$\mathrm{Res}_0 f(z) = \mathrm{Res}_0 \frac{g(z)}{h(z)} = g(0)\,\mathrm{Res}_0 \frac{1}{h(z)} = g(0)\frac{1}{h'(0)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten, die außerhalb des Definitionsbereiches liegen:

a) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$,

b) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$,

c) $z\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$,

d) $\dfrac{1}{\sin(\pi z)}$.

Lösung

a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Mit der Potenzreihenentwicklung von cos gilt:

$$\frac{1}{z^2}(1-\cos z) = \frac{1}{z^2}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}.$$

Also ist $\mathrm{Res}_0 \frac{1-\cos z}{z^2} = 0$, die Funktion hat in 0 eine hebbare Singularität.

b) Es gilt: $(z^2+1)^{-3} = (z-i)^{-3}(z+i)^{-3}$. Also sind $-i$ und i dreifache Polstellen von $\frac{1}{(z^2+1)^3}$, weitere isolierte Singularitäten bestehen nicht.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)^3} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_1(i)} \frac{1}{(z+i)^3}\frac{1}{(z-i)^3}\,dz \underset{C.I.F}{=} = \frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''\Bigg|_{z=i}\\ &= \frac{1}{2}\left(-3(z+i)^{-4}\right)'\Big|_{z=i} = \frac{1}{2}(-3)(-4)(i+i)^{-5} = -\frac{3}{16}i\end{aligned}$$

Analog:

$$\mathrm{Res}_{-i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z-i)^3}\right)''\Bigg|_{z=-i} = \cdots = \frac{3}{16}i.$$

c) $\exp(\frac{1}{1-z})$ besitzt in $z = 1$ eine wesentliche Singularität und ist ansonsten holomorph. Es gilt:

$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!}(1-z)^n.$$

Also ergibt sich

$$
\begin{aligned}
z\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) &= -(1-z-1)\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}(1-z)^{n+1} + \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}(1-z)^{n} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{1}\frac{1}{(-n+1)!}(1-z)^{n} + \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}(1-z)^{n} \\
&= -(1-z) + \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n}\left(\frac{1}{(-n)!}-\frac{1}{(-n+1)!}\right)(z-1)^{n}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt für das Residuum:

$$
\operatorname{Res}_1\left(z\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.
$$

d) $\frac{1}{\sim(\pi z)}$ besitzt in $z=k$ für $k\in\mathbb{Z}$ einfache Pole, da $\sin(\pi z)$ einfache Nullstellen dort besitzt. Für die Residuen dort gilt mit Lemma (1.4)c):

$$
\operatorname{Res}_k \frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{(\sin\pi z)'(k)} = \frac{1}{\pi\cos(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{\pi}.
$$

Aufgabe 5 (3+3 Punkte) Seien f,g holomorph in $a\in\mathbb{C}$. Zeigen Sie

a) Hat g in a eine Nullstelle 1. Ordnung, so gilt

$$
\operatorname{Res}_a \frac{f}{g^2} = \frac{f'(a)g'(a)-f(a)g''(a)}{(g'(a))^3}.
$$

b) Hat g in a eine Nullstelle 2. Ordnung, so gilt

$$
\operatorname{Res}_a \frac{f}{g} = \frac{6f'(a)g''(a)-2f(a)g'''(a)}{3(g''(a))^2}.
$$

Lösung

a) Da g holomorph ist und dort eine Nullstelle 1. Ordnung hat, exisitiert ein $\varepsilon>0$, so dass

$$
g(z) = (z-a)h(z) = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^n
$$

mit $h(a)=g'(a)\neq 0$. Da f/g^2 in a höchstens einen Pol 2. Ordnung hat, gilt

$$
\frac{f(z)}{g^2(z)} = \sum_{k=-2}^{\infty} a_k(z-a)^k,
$$

also

$$
\lim_{z\to a}\left((z-a)^2\frac{f}{g^2}\right)' = \lim_{z\to a}\left(\sum_{k=-2}^{\infty}a_k(z-a)^{k+2}\right)' = \lim_{z\to a}\sum_{k=-1}^{\infty}a_k(k+2)(z-a)^{k+1} = a_{-1} = \operatorname{Res}_a\frac{f}{g^2}.
$$

Damit ergibt sich das Residuum zu

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_a \frac{f}{g^2} &= \lim_{z\to a}\left((z-a)^2\frac{f(z)}{g^2(z)}\right)' = \lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)}{h^2(z)}\right)' = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)h^2(z)-f(z)\cdot 2h(z)h'(z)}{h^4(z)}\\ &= \frac{f'(a)h(a)-2f(a)h'(a)}{h^3(a)} = \frac{f'(a)g'(a)-2f(a)h'(a)}{(g'(a))^3}.\end{aligned}$$

Da $h'(a) = \left.\frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\right|_{n=1}$, folgt $\frac{g''(a)}{2} = h'(a)$, damit folgt die Behauptung.

b) Analog ergibt sich mit $g(z) = (z-a)^2h(z)$ und $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n+1)}}{(n+2)!}(a)(z-a)^n$:

$$h(a) = \frac{1}{2}g''(a) \neq 0, \quad h'(a) = \frac{1}{6}g'''(a),$$

da g eine Nullstelle 2. Ordnung hat. Das Residuum ergibt sich nun zu

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_a \frac{f}{g} \; a) &= \lim_{z\to a}\left((z-a)^2\frac{f(z)}{g(z)}\right)^2 = \lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)}{h(z)}\right)'\\ &= \frac{f'(a)h(a)-f(a)h'(a)}{h^2(a)} = \frac{6f'(a)g''(a)-2f(a)g'''(a)}{3(g''(a))^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4+2 Punkte)

a) Sei $0 \neq w \in \mathbb{C}$. Sei f eine auf dem Gebiet

$$T_w := \{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im}\left(\frac{2\pi}{w}z\right) < b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

holomorphe Funktion mit der Periode w, d. h. $f(z+w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dann besitzt f eine eindeutige Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi i}{w}nz\right),$$

die auf T_w lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $z_0 \in T_w$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{w}\int_{[z_0;z_0+w]} f(\zeta)\exp\left(-\frac{2\pi i}{w}n\zeta\right)\, d\zeta.$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe zu $\frac{1}{\cos z}$.

Lösung

a) Definiere $g(z) := f(zw)$. Also ist

$$g(z+1) = f(zw+w) = f(zw) = g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

d. h. g hat die Periode 1. Des weiteren ist g holomorph auf

$$T := \{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im}(2\pi z) < b\} = \{z \in \mathbb{C}; \frac{a}{2\pi} < \operatorname{Im} z < \frac{b}{2\pi}\}.$$

Also besitzt g mit Satz XX(4.3) eine eindeutige Darstellung als Fourierreihe

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

die auf T lokal gleichmäßig gegen g konvergiert.

Für $z_0 \in T$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a_n = \int_{[z_0;z_0+1]} g(\zeta) e^{-2\pi i n \zeta}\, d\zeta.$$

Es ist $g(z) = f(zw) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$. Setze $u = zw$, damit gilt $u \in T_w$ und

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{u}{w}} \quad \text{für } u \in \mathbb{C},$$

mit

$$a_n = \int_{[z_0;z_0+1]} f(w\zeta) e^{-2\pi i n \zeta}\, d\zeta.$$

Mit der Substitution $\psi = w\zeta$ folgt

$$a_n = \frac{1}{w} \int_{[wz_0;wz_0+w]} f(\psi) e^{-2\pi i n \frac{\psi}{w}}\, d\psi.$$

Mit $wz_0 =: u_0 \in T_w$ folgt die Behauptung.

b) $\frac{1}{\cos z}$ ist 2π-periodisch, da $\cos(z+2\pi) = \cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion ist holomorph in der oberen und unteren Halbebene, und es gilt:

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = 2e^{iz} \frac{1}{1+e^{2iz}} = 2e^{-iz} \frac{1}{1+e^{-2iz}}.$$

Da $|e^{2iz}| = |e^{2ix-2y}| = e^{-2y} < 1$ für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ und $|e^{-2iz}| = e^{2y} < 1$ für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $y < 0$, ist

$$\frac{1}{\cos z} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} 2e^{iz}(-e^{2iz})^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k e^{(2k+1)iz} & \text{für } \operatorname{Im} z > 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} 2e^{-iz}(-e^{-2iz})^k = \sum_{k=-\infty}^{0} 2(-1)^k e^{(2k-1)iz} & \text{für } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$