Zahlenkörper

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen so genannten Körper $\mathbb{K}$, d. h.:

Zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{K}$ ist eine Summe

$$r + s \in \mathbb{K}$$

und ein Produkt

$$r \cdot s \in \mathbb{K}$$

zugeordnet. Diese Zuordnungen heißen Addition und Multiplikation.

Regeln der Addition

(A.1) $r + s = s + r$ (Kommutativgesetz),

(A.2) $(r + s) + t = r + (s + t)$ (Assoziativgesetz),

(A.3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit $r + 0 = r$ für alle $r \in \mathbb{K}$ (Existenz der Null),

(A.4) Zu jedem $r \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $(-r) \in \mathbb{K}$ mit $r + (-r) = 0$ (Existenz inverser Elemente).

Regeln der Multiplikation

(M.1) $r \cdot s = s \cdot r$ (Kommutativgesetz),

(M.2) $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ (Assoziativgesetz),

(M.3) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit $r \cdot 1 = r$ für alle $r \in \mathbb{K}$ (Existenz der Eins),

(M.4) Zu jedem $r \in \mathbb{K}$ mit $r \neq 0$ gibt es ein Element $r^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $r \cdot r^{-1} = 1$ (Existenz inverser Elemente).

Distributivgesetz

(D) $r \cdot (s + t) = (r \cdot s) + (r \cdot t)$.

Um Klammern zu sparen vereinbart man „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ und außerdem schreibt man für $r \cdot s$ meistens kürzer rs. Das Distributivgesetz lässt sich dann in der Form $r(s + t) = rs + rt$ schreiben.

Setzt man $a - b := a + (-b)$ und $a : b := a \cdot b^{-1}$, dann sind in $\mathbb{K}$ die vier Grundrechenarten mit Ausnahme der Division durch 0 uneingeschränkt ausführbar.

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Leonhard Euler (1707–1783) führt eine neue „Zahl“ i ein mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

und betrachtet dann Zahlen der Form

$$z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Eine solche Zahl nennen wir eine komplexe Zahl. Dabei heißen x der Realteil und y der Imaginärteil von z. (Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) Die Zahl i bezeichnet man als imaginäre Einheit. Weiterhin heißen

$$\overline{z} := x - iy \text{ die zu } z \text{ konjugiert komplexe Zahl,}$$

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \text{ der Betrag von } z.$$

Definition. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist definiert als

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Summe

$$(x + iy) + (x' + iy') := (x + x') + i(y + y')$$

und dem Produkt

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') := xx' + xy'i + yx'i + yy'i^2 = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

Für eine komplexe Zahl der Form $x + i \cdot 0$ schreibt man einfach x, d. h. die reellen Zahlen sind in der Menge komplexen Zahlen enthalten ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Satz. *Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper mit:*
Nullelement der Addition: $0 + i \cdot 0 = 0$,
inverse Elemente bezüglich der Addition: $-(x + iy) = -x - iy$,
Einselement der Multiplikation: $1 + i \cdot 0 = 1$,
inverse Elemente bezüglich der Multiplikation:

$$(x + iy)^{-1} := \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Merkformel:

$$(x + iy)^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2y^2}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

$\mathbb{C}$ hat also bezüglich der Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ dieselben Eigenschaften wie die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Es gilt aber

Satz. *Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, d. h. es man kann keine „vernünftige“ $\leq$-Beziehung auf $\mathbb{C}$ definieren.*

Die Polarkoordinatendarstellung

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Setzt man $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, dann existiert eine reelle Zahl $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Somit hat man für z die Darstellung

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Diese Darstellung nennt man Polarkoordinatendarstellung oder Polardarstellung von z. Dabei heißt r auch die Länge und φ das Argument von z ($\varphi = \arg z$). Für $z \neq 0$ ist die Polarkoordinatendarstellung eindeutig bestimmt.

Manchmal ist es zweckmäßig, auch andere Werte für φ zuzulassen. Ist dann $\varphi = \arg z$, so ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch $\varphi + 2k\pi = \arg z$. Die Eindeutigkeit der Darstellung geht dabei natürlich verloren.

Beispiele.

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \sin 0 = \sin\pi = 0$$

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\pi = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

Damit erhält man die Polardarstellungen

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 \qquad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi \qquad -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

und für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$a = a(\cos 0 + i\sin 0) \qquad ia = a\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$-a = a(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad -ia = a\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big)$$

Die komplexe Exponentialfunktion

Wir betrachten hier nur eine einzige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, nämlich die komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$, die man wie folgt definieren kann

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat im Wesentlichen dieselben Eigenschaften wie die reelle Exponentialfunktion, insbesondere gilt die Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \qquad \left(e^z\right)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}; z \in \mathbb{C}).$$

Polarkoordinatendarstellung mit der Exponentialfunktion

Wegen $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ lässt sich die Polarkoordinatendarstellung von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der Exponentialfunktion folgendermaßen schreiben

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = r\,\mathrm{E}(\varphi)$$

mit

$$\mathrm{E}(\varphi) := \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Die Darstellung mittels der Exponentialfunktion ist zum Rechnen besser geeignet als die Darstellung mit Kosinus und Sinus.

Beispiele. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt

$$a = a\,\mathrm{E}(0) = ae^{i0} \qquad ia = a\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}\right) = ae^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-a = a\,\mathrm{E}(\pi) = ae^{i\pi} \qquad -ia = a\,\mathrm{E}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ae^{i\frac{3\pi}{2}} = ae^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Sind $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$z^{-1} = \left(re^{i\varphi}\right)^{-1} = r^{-1}e^{-i\varphi}, \quad z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$zw = re^{i\varphi}se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}.$$

$$i^{-1} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \quad i^3 = e^{i3\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,$$

$$i\cdot(-i) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} = e^0 = 1.$$

Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $z^2 = a$ nur dann eine Lösung $\zeta \in \mathbb{R}$, wenn $a \geq 0$ ist. Lassen wir auch komplexe Lösungen zu, dann ist

$$\zeta := \begin{cases} \sqrt{a}, & \text{falls } a \geq 0, \\ i\sqrt{-a} = i\sqrt{|a|}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

eine Lösung. Dabei bezeichnet $\sqrt{r}$ die übliche Wurzel aus einer reellen Zahl $r \geq 0$.

Beweis: Es gilt z. B. im Fall $a < 0$

$$\left(i\sqrt{-a}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{-a}\right)^2 = (-1)(-a) = a$$

Ist ζ eine Lösung unserer Gleichung, dann heißt ζ auch eine Wurzel von a. In $\mathbb{C}$ besitzen also auch negative reelle Zahlen eine Wurzel.

Satz. *Für jedes $w \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung*

$$z^k = w$$

mindestens eine Lösung $\zeta \in \mathbb{C}$. Ist $w \neq 0$, dann hat die Gleichung genau k verschiedene Lösungen.

Das Berechnen einer Lösung der Gleichung $z^k = w$ ist besonders einfach, wenn w in Polarkoordinaten gegeben ist. Ist nämlich $w = re^{i\varphi}$ gegeben, dann ist

$$\zeta = \sqrt[k]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{k}}$$

eine Lösung der Gleichung. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt nämlich

$$\zeta^k = \left(\sqrt[k]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{k}}\right)^k = \left(\sqrt[k]{r}\right)^k \left(e^{i\frac{\varphi}{k}}\right)^k = re^{i\frac{\varphi}{k}k} = re^{i\varphi} = w.$$

Beispiele. a) Gesucht ist eine Lösung von $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Die Lösung ist

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Für die Normaldarstellung gilt

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Probe:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+i)^2 = \frac{2}{4}(1^2+2i+i^2) = \frac{1}{2}(1+2i-1) = i.$$

b) Als eine Lösung von $z^3 = i$ erhält man ebenso

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

und für die Normaldarstellung gilt

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).$$

Probe:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^3 &= \frac{1}{8}\left((\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 i + 3(\sqrt{3})i^2 + i^3\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i\right) = i.\end{aligned}$$

Die weiteren Lösungen sind im Übrigen $\zeta = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$ und $\zeta = -i$.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind Lösungen der quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$. Dabei wollen wir auch komplexe Zahlen als Lösungen zulassen. Mit quadratischer Ergänzung folgt

$$z^2 + 2\frac{p}{2}z + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \text{oder} \qquad \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Ist nun ζ eine Wurzel von $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, also $\zeta^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, dann sind

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \zeta, \qquad z_1 = -\frac{p}{2} - \zeta$$

Lösungen unserer Gleichung. Quadratischen Gleichungen haben also in $\mathbb{C}$ immer eine Lösung. Mit Polynomdivision folgt

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

Die Euler'sche Formel

Zum Abschluss die vielleicht schönste Formel der gesamten Mathematik. Es gilt

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Schreibt man dies in der Form

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

dann werden in dieser Formel die wichtigsten Zahlen der Mathematik miteinander verknüpft, nämlich $0, 1, i, e, \pi$.