

Zahlenkörper

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden einen so genannten Körper \mathbb{K} , d. h.:

Zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{K}$ ist eine Summe

$$r + s \in \mathbb{K}$$

und ein Produkt

$$r \cdot s \in \mathbb{K}$$

zugeordnet. Diese Zuordnungen heißen Addition und Multiplikation.



Regeln der Addition

(A.1) $r + s = s + r$ (Kommutativgesetz),

(A.2) $(r + s) + t = r + (s + t)$ (Assoziativgesetz),

(A.3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit $r + 0 = r$ für alle $r \in \mathbb{K}$
(Existenz der Null),

(A.4) Zu jedem $r \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $(-r) \in \mathbb{K}$ mit $r + (-r) = 0$
(Existenz inverser Elemente).

Regeln der Multiplikation

(M.1) $r \cdot s = s \cdot r$ (Kommutativgesetz),

(M.2) $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ (Assoziativgesetz),

(M.3) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit $r \cdot 1 = r$ für alle $r \in \mathbb{K}$
(Existenz der Eins),

(M.4) Zu jedem $r \in \mathbb{K}$ mit $r \neq 0$ gibt es ein Element $r^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $r \cdot r^{-1} = 1$
(Existenz inverser Elemente).



Distributivgesetz

$$(D) \quad r \cdot (s + t) = (r \cdot s) + (r \cdot t).$$

Um Klammern zu sparen vereinbart man „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ und außerdem schreibt man für $r \cdot s$ meistens kürzer rs . Das Distributivgesetz lässt sich dann in der Form $r(s + t) = rs + rt$ schreiben.

Setzt man $a - b := a + (-b)$ und $a : b := a \cdot b^{-1}$, dann sind in \mathbb{K} die vier Grundrechenarten mit Ausnahme der Division durch 0 uneingeschränkt ausführbar.



Der Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C}

Leonhard Euler (1707–1783) führt eine neue „Zahl“ i ein mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

und betrachtet dann Zahlen der Form

$$z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Eine solche Zahl nennen wir eine komplexe Zahl. Dabei heißen x der Realteil und y der Imaginärteil von z . (Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) Die Zahl i bezeichnet man als imaginäre Einheit. Weiterhin heißen

$\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl,

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z .



Definition. Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} ist definiert als

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Summe

$$(x + iy) + (x' + iy') := (x + x') + i(y + y')$$

und dem Produkt

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') := xx' + xy'i + yx'i + yy'i^2 = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

Für eine komplexe Zahl der Form $x + i \cdot 0$ schreibt man einfach x , d. h. die reellen Zahlen sind in der Menge komplexen Zahlen enthalten ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).



Satz. Die komplexen Zahlen \mathbb{C} bilden einen **Körper** mit:

Nullelement der Addition: $0 + i \cdot 0 = 0$,

inverse Elemente bezüglich der Addition: $-(x + iy) = -x - iy$,

Einselement der Multiplikation: $1 + i \cdot 0 = 1$,

inverse Elemente bezüglich der Multiplikation:

$$(x + iy)^{-1} := \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Merkformel:

$$\begin{aligned}(x + iy)^{-1} &= \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$



\mathbb{C} hat also bezüglich der Rechenoperationen $+$ und \cdot dieselben Eigenschaften wie die Körper \mathbb{Q} und \mathbb{R} . Es gilt aber

Satz. *Der Körper \mathbb{C} kann nicht angeordnet werden, d. h. es man kann keine „vernünftige“ \leq -Beziehung auf \mathbb{C} definieren.*



Die Polarkoordinatendarstellung

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Setzt man $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, dann existiert eine reelle Zahl $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Somit hat man für z die Darstellung

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Diese Darstellung nennt man Polarkoordinatendarstellung oder Polardarstellung von z . Dabei heißt r auch die Länge und φ das Argument von z ($\varphi = \arg z$). Für $z \neq 0$ ist die Polarkoordinatendarstellung eindeutig bestimmt.

Manchmal ist es zweckmäßig, auch andere Werte für φ zuzulassen. Ist dann $\varphi = \arg z$, so ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch $\varphi + 2k\pi = \arg z$. Die Eindeutigkeit der Darstellung geht dabei natürlich verloren.



Beispiele.

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = \sin 0 = \sin \pi = 0$$

$$\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \pi = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

Damit erhält man die Polardarstellungen

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

und für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$a = a(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$ia = a \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-a = a(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$-ia = a \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$



Die komplexe Exponentialfunktion

Wir betrachten hier nur eine einzige Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, nämlich die komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$, die man wie folgt definieren kann

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat im Wesentlichen dieselben Eigenschaften wie die reelle Exponentialfunktion, insbesondere gilt die Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}; z \in \mathbb{C}).$$



Polarkoordinatendarstellung mit der Exponentialfunktion

Wegen $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ lässt sich die Polarkoordinatendarstellung von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der Exponentialfunktion folgendermaßen schreiben

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} = r E(\varphi)$$

mit

$$E(\varphi) := \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Die Darstellung mittels der Exponentialfunktion ist zum Rechnen besser geeignet als die Darstellung mit Kosinus und Sinus.



Beispiele. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt

$$a = a \operatorname{E}(0) = ae^{i0} \qquad ia = a \operatorname{E}\left(\frac{\pi}{2}\right) = ae^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-a = a \operatorname{E}(\pi) = ae^{i\pi} \qquad -ia = a \operatorname{E}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ae^{i\frac{3\pi}{2}} = ae^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Sind $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$z^{-1} = (re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1}e^{-i\varphi}, \quad z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$zw = re^{i\varphi} se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}.$$

$$i^{-1} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \quad i^3 = e^{i3\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,$$

$$i \cdot (-i) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} = e^0 = 1.$$



Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $z^2 = a$ nur dann eine Lösung $\zeta \in \mathbb{R}$, wenn $a \geq 0$ ist. Lassen wir auch komplexe Lösungen zu, dann ist

$$\zeta := \begin{cases} \sqrt{a}, & \text{falls } a \geq 0, \\ i\sqrt{-a} = i\sqrt{|a|}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

eine Lösung. Dabei bezeichnet \sqrt{r} die übliche Wurzel aus einer reellen Zahl $r \geq 0$.

Beweis: Es gilt z. B. im Fall $a < 0$

$$(i\sqrt{-a})^2 = i^2(\sqrt{-a})^2 = (-1)(-a) = a$$

Ist ζ eine Lösung unserer Gleichung, dann heißt ζ auch eine Wurzel von a . In \mathbb{C} besitzen also auch negative reelle Zahlen eine Wurzel.



Satz. Für jedes $w \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung

$$z^k = w$$

mindestens eine Lösung $\zeta \in \mathbb{C}$. Ist $w \neq 0$, dann hat die Gleichung genau k verschiedene Lösungen.

Das Berechnen einer Lösung der Gleichung $z^k = w$ ist besonders einfach, wenn w in Polarkoordinaten gegeben ist. Ist nämlich $w = re^{i\varphi}$ gegeben, dann ist

$$\zeta = \sqrt[k]{r} e^{i\frac{\varphi}{k}}$$

eine Lösung der Gleichung. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt nämlich

$$\zeta^k = \left(\sqrt[k]{r} e^{i\frac{\varphi}{k}}\right)^k = \left(\sqrt[k]{r}\right)^k \left(e^{i\frac{\varphi}{k}}\right)^k = re^{i\frac{\varphi}{k}k} = re^{i\varphi} = w.$$



Beispiele. a) Gesucht ist eine Lösung von $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Die Lösung ist

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Für die Normaldarstellung gilt

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Probe:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1 + i)^2 = \frac{2}{4}(1^2 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i.$$



b) Als eine Lösung von $z^3 = i$ erhält man ebenso

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

und für die Normaldarstellung gilt

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i).$$

Probe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\right)^3 &= \frac{1}{8} \left((\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 i + 3(\sqrt{3})i^2 + i^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i) = i. \end{aligned}$$

Die weiteren Lösungen sind im Übrigen $\zeta = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$ und $\zeta = -i$.



Quadratische Gleichungen

Gesucht sind Lösungen der quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$. Dabei wollen wir auch komplexe Zahlen als Lösungen zulassen. Mit quadratischer Ergänzung folgt

$$z^2 + 2\frac{p}{2}z + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{oder} \quad \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Ist nun ζ eine Wurzel von $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, also $\zeta^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, dann sind

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \zeta, \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \zeta$$

Lösungen unserer Gleichung. Quadratischen Gleichungen haben also in \mathbb{C} immer eine Lösung. Mit Polynomdivision folgt

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$



Die Euler'sche Formel

Zum Abschluss die vielleicht schönste Formel der gesamten Mathematik. Es gilt

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Schreibt man dies in der Form

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

dann werden in dieser Formel die wichtigsten Zahlen der Mathematik miteinander verknüpft, nämlich $0, 1, i, e, \pi$.

