Lehrstuhl A für Mathematik / Schülertage 2003

Fibonacci - Zahlen (das Wichtigste)

S. Walcher

1. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung einer (sehr idealisierten) Population von Kaninchen.
Erste Folgenglieder:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \ldots$$

2. Geschlossene Darstellung:

(a) Um *irgendeine* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen (eine sog. Fibonacci-Folge) zu finden, die die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

erfüllt, macht man den *Ansatz*

$$a_n = k^n,$$

mit einem zu bestimmenden $k \in \mathbb{R}$.
Einsetzen liefert

$$k^{n+1} = k^n + k^{n-1}, \qquad \text{oder}$$

$$k^{n-1}\left(k^2 - k - 1\right) = 0 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

Für $k \neq 0$ ($k = 0$ ist uninteressant und liefert auch - strikt gesehen - keine Lösung) folgt die quadratische Gleichung $k^2 - k - 1 = 0$, mit den Lösungen

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right).$$

So ergeben sich Fibonacci-Folgen

$$(k_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{und} \quad (k_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

(b) Superpositionsprinzip: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Fibonacci-Folgen, und sind c, d reelle Konstanten, so ist auch $(c \cdot a_n + d \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fibonacci-Folge.

(c) Macht man nun für die Folge der Fibonacci-Zahlen den Ansatz $f_n = c_1 \cdot k_1^n + c_2 \cdot k_2^n$ mit Konstanten c_1 und c_2, so ergeben die Bedingungen $f_0 = f_1 = 1$ die Werte $c_1 = (\sqrt{5}+1)/\sqrt{5}$, $c_2 = (\sqrt{5}-1)/\sqrt{5}$, und wir erhalten die geschlossene Darstellung

$$f_n = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n$$

(d) Eine Anwendung: Wegen $|k_2| < 1$ gilt $k_2^n \to 0$ für $n \to \infty$, also

$$f_n \approx \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n,$$

wenn n “groß” ist. Wir haben eine relativ einfache Berechnungsformel gefunden.

3. Fibonacci und Goldener Schnitt:

Die Zahl $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = -k_2 = \frac{1}{k_1}$ heißt auch *Goldener* Schnitt: Es ist $\varphi : 1 = (1-\varphi) : \varphi$.
Zum Beispiel gilt (wegen **2.**):

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} \to \varphi \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

4. Der Trick aus **2.** ist verallgemeinerbar. Zum Beispiel klappt er auch für die Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Rekursionsformel

$$g_{n+1} = g_n + 2g_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Rekursionsformel

$$h_{n+2} = h_{n+1} - h_n + h_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wichtig ist, dass die Tricks resp. Eigenschaften aus **2.** (a)(b) auch hier funktionieren.

5. Zoologen finden das Kaninchenmodell natürlich zum Lachen. Botaniker hingegen wissen, dass Fibonacci-Zahlen in der Natur vorkommen.