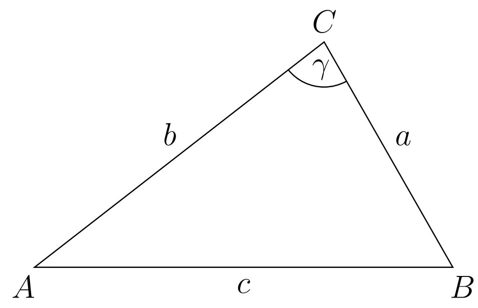
# Die Pythagoras Gleichung

Aus der Schule kennt man den Cosinus-Satz für Dreiecke $A, B, C$ mit den Seitenlängen $a, b, c$ und den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$




Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, mit rechtem Winkel $\gamma$, wenn $\cos\gamma = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Beispiele für solche rechtwinkligen Dreiecke sind

$$a = 4,\ b = 3,\ c = 5, \qquad a = 12,\ b = 5,\ c = 13.$$

In dieser Vorlesung wollen wir alle ganzzahligen Lösungen der Pythagoras-Gleichung bestimmen.

**Definition.** Ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ heißt ein *pythagoräisches Tripel*. Man nennt es *primitiv*, wenn $\mathrm{ggT}\,(a, b, c) = 1$.

Eine erste Beschreibung beinhaltet das

**Lemma.** *a) Man erhält alle pythagoräischen Tripel genau einmal in der Form*

$$(da, db, dc),$$

*wobei $d \in \mathbb{N}$ und $(a, b, c)$ ein primitives pythagoraisches Tripel ist.*
*b) Für jedes primitive pythagoräische Tripel $(a, b, c)$ gilt*

*(i)* $\mathrm{ggT}\,(a, b) = \mathrm{ggT}\,(a, c) = \mathrm{ggT}\,(b, c) = 1$.
*(ii)* **Entweder** *ist $a$ gerade und $b$ ungerade* **oder** *$a$ ungerade und $b$ gerade.*
*(iii) $c$ ist ungerade.*

*Beweis.* a) Aus $a^2+b^2 = c^2$ folgt $(da)^2+(db)^2 = (dc)^2$. Ist $(a, b, c)$ ein beliebiges pythagoräisches Tripel, so sei $d = \mathrm{ggT}\,(a, b, c)$. Dann ist $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ ein primitives pythagoräisches Tripel.

b) (i) Wenn eine Primzahl zwei der Zahlen $a, b, c$ teilt, so wegen $a^2 + b^2 = c^2$ auch die dritte.
(ii) Wegen $\mathrm{ggT}\,(a, b) = 1$ können $a, b$ nicht beide gerade sein. Angenommen $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$ sind beide ungerade. Dann ist

$$a^2 + b^2 = 4k(k + 1) + 4l(l + 1) + 2 = 4x + 2, \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist $c$ gerade. Dann ist $c^2 = 4y$, $y \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch.
(iii) Aus $a = 2k + 1$, $b = 2l$ folgt

$$c^2 = 4k(k + 1) + 4l + 1 = 4x + 1, \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist $c$ ungerade. □

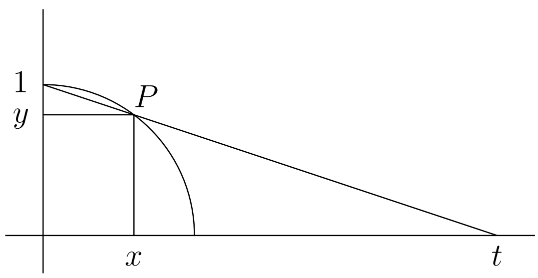
Ist $(a, b, c)$ ein primitives pythagoräisches Tripel, so liegt

$$(x, y), \quad x = \frac{a}{c} > 0, \quad y = \frac{b}{c} > 0 \qquad \text{wegen} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

auf dem Einheitskreis und hat rationale Koordinaten. Ist $(x, y)$ ein beliebiger rationaler Punkt auf dem Einheitskreis, so sei $c$ der Hauptnenner der Koordinaten. Dann ist $(xc, yc, c)$ ein primitives pythagoräisches Tripel.

Wir beschreiben die stereographische Projektion

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\} \ \to\ \{t \in \mathbb{R};\ t > 1\}.$$




Man legt eine Gerade durch $(1, 0)$ und $P = (x, y)$. Der Schnittpunkt mit der $x$-Achse sei $t$. Aus dem Strahlensatz ergibt sich die Beziehung

$$\frac{t}{1} = \frac{t - x}{y}.$$

Daraus erhält man

$$t = \frac{x}{1 - y}, \qquad (x, y) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right).$$

Die rationalen Punkte auf dem Einheitskreisbogen entsprechen daher eindeutig den rationalen Zahlen $> 1$.

$$\begin{array}{rcccccc}
(4,3,5) & \to & \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) & \to & \frac{4/5}{1-3/5} & = & 2 \\
(3,4,5) & \to & \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) & \to & \frac{3/5}{1-4/5} & = & 3 \\
(12,5,13) & \to & \left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right) & \to & \frac{12/13}{1-5/13} & = & \frac{3}{2} \\
(5,12,13) & \to & \left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right) & \to & \frac{5/13}{1-12/13} & = & 5
\end{array}$$

**Satz.** *Man erhält die primitiven pythagoräischen Tripel* $(a,b,c)$ *genau einmal in der Form*

$$(a,b,c) = (2uv, u^2-v^2, u^2+v^2) \quad \textit{und} \quad (a,b,c) = (u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2),$$

*wobei* $(u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *teilerfremd, nicht beide ungerade und* $u > v$.

*Beweis.* Offenbar sind die angegebenen Tripel primitive pythagoräische Tripel. Ist nun $(a,b,c)$ ein beliebiges primitives pythagoraisches Tripel mit geradem $a$, so betrachten wir $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$, das auf ein $t \in \mathbb{Q}$, $t > 1$ abgebildet wird. Also gibt es teilerfremde $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$ mit

$$\frac{a/c}{1-b/c} = \frac{a}{c-b} = \frac{u}{v}.$$

Man erhält

$$\frac{a}{c} = \frac{2u/v}{(u/v)^2+1} = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{(u/v)^2-1}{(u/v)^2+1} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}.$$

Wegen $\mathrm{ggT}\,(a,c) = \mathrm{ggT}\,(b,c) = 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$2uv = na, \quad u^2-v^2 = nb, \quad u^2+v^2 = nc.$$

*1. Fall:* $u, v$ sind beide ungerade

Dann gilt $n = \mathrm{ggT}\,(2uv, u^2-v^2) = 2 \neq 1$. Also ist $a = uv$ ungerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

*2. Fall:* $u, v$ sind nicht beide ungerade

Dann hat man $n = \mathrm{ggT}\,(2uv, u^2-v^2) = 1$ und die Existenz.
Ist $a$ ungerade, so ist $b$ gerade und man erhält die analoge Beschreibung durch Vertauschung der Koordinaten.
Weil $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$ auf $\frac{u}{v}$ abgebildet wird, hat man die Eindeutigkeit. □

Mit $u = 20$, $v = 17$ kommt man auf

$$a = 680, \quad b = 111, \quad c = 689.$$

Mit $u = 2$, $v = 1$ bzw. $u = 3$, $v = 2$ kommt man auf die am Anfang genannten pythagoräischen Tripel.

Im Gegensatz dazu steht der

**Satz von Fermat/Wiles.** *Ist $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, so gibt es keine natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit*

$$a^n + b^n = c^n,$$

*d.h.*

$$\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q};\ x > 0, y > 0, x^n + y^n = 1\} = \emptyset.$$

Dieser Satz wurde von Wiles als Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage über elliptische Kurven bewiesen.