LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen am Montag, den 28. Juli 2003

1. Übung: Komplexe Zahlen

Wiederholung:
$\mathbb{C}$ bezeichne die Menge der *komplexen Zahlen*, also $\mathbb{C} = \{x+iy | x,y \in \mathbb{R}\}$, wobei man die Eulersche Zahl i mit $i^2 = -1$ wählt. Addition und Multiplikation werden wie folgt erklärt:

$$(a+ib)+(x+iy) = (a+x)+i(b+y)$$
$$(a+ib)\cdot(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$$

Weiter führt den *Betrag* einer komplexen Zahl wie folgt ein:

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_0^+$$

Komplexe Zahlen besitzen eine so genannte *Polardarstellung*:

$$z = x+iy = rE(\varphi)$$

Dabei setzt man $E(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und fordert $\varphi \in [0, 2\pi[$ sowie $r \geq 0$. Jede komplexe Zahl außer der Null besitzt dann eine eindeutige Polardarstellung. Es ist natürlich $rE(\varphi) = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, d.h. die Umrechnung von Polardarstellung in die „normale“ Darstellung ist leicht.

Aufgabe 1 (Computeraufgabe) Unter http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/ss03/schuelertage/tag1.html finden Sie die Aufgaben für den Computerraum. Alles weiter wird dort verraten.

Aufgabe 2 (∗∗) Es seien x und y reelle Zahlen und $x+iy \neq 0$. Zeigen Sie dass für

$$r := |x+iy|$$
$$\varphi := \begin{cases} \arcsin\frac{y}{r} & \text{falls } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \pi - \arcsin\frac{y}{r} & \text{falls } x < 0 \\ 2\pi + \arcsin\frac{y}{r} & \text{falls } x \geq 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

gilt:

$$x+iy = rE(\varphi)$$

Dabei bezeichnet $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ den Arcussinus, die Umkehrfunktion des Sinus.
Hinweis: Es gilt für beliebige $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$|rE(\varphi)| = |r\cos\varphi + ir\sin\varphi| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2\cdot 1} = r\,.$$

Aufgabe 3 (∗) (Berechnen der Polardarstellung) Berechnen Sie die Polardarstellungen der Zahlen:

a) $1 = 1 + i\cdot 0$,

b) $i = 0 + i = 0 + i\cdot 1$,

c) $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}$ und

d) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 4 ($*$) (kartesische Koordinaten) Berechnen Sie die Darstellung in kartesischen Koordinaten (als $x+iy$) für folgende Zahlen:

a) $\sqrt{2}E\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

b) $10E(\pi)$,

c) $2E\left(\frac{3\pi}{2}\right)$,

d) $E\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \cdot E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Aufgabe 5 ($*$) bis ($**$) Berechnen Sie:

a) $(1+2i)+(-2+3i)$,

b) $(2-i)\cdot(2+i)/5$,

c) $(a+ib)\cdot(a-ib)/(a^2+b^2)$ für $a+ib \neq 0$,

d) $\frac{1}{x+iy}$. Was fällt im Vergleich zu Teil c) auf?

e) $2E\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cdot 3E\left(\frac{1}{3}\pi\right)$,

f) $aE(\varphi)\cdot bE(\psi)$ für $a,b>0$, $\varphi \in \mathbb{R}$,

g) $(aE(\varphi))^2$, sowie

h) $(aE(\varphi))^3$. Was ist wohl $(aE(\varphi))^4$?

Aufgabe 6 ($***$) Seien $A=0$, $B=3$, $C=\sqrt{4,5}+i\sqrt{4,5}$ und $D=2i$. Was ist $C\cdot D$? Was ist der Winkel $\measuredangle(B,A,(C\cdot D))$? Was sind im Vergleich dazu die Winkel $\measuredangle(B,A,C)$ und $\measuredangle(B,A,D)$? Welcher Zusammenhang besteht?

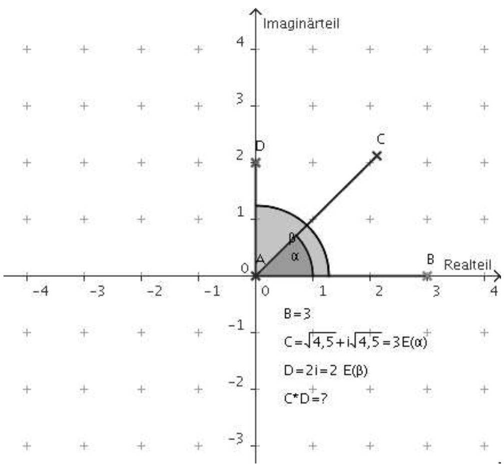

Abbildung 1: Winkelmessung

Aufgabe 7 ($***$) (Winkel unter Multiplikation und Addition) Es seien die Zahlen $A = 1+i$, $B = 3+i$ und $C = \left(2+\sqrt{3}\right)/2 + i3/2$ gegeben. Weiter sei

$$f(z) = (2+i)\cdot z - i - 4$$

a) Was ist der Winkel $\measuredangle(B,A,C)$?

b) Was ist der Winkel $\measuredangle(f(B), f(A), f(C))$?

c) Was ist wohl der Winkel $\measuredangle(g(B), g(A), g(C))$ für $g(z) := az + b$?

Aufgabe 8 ($**$) (Nullstellen von Polynomen) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^2 + 1$. Zeigen Sie:

a) p hat keine reellen Nullstellen, d.h. es gibt kein x in $\mathbb{R}$ mit $p(x) = 0$.

b) Hat p komplexe Nullstellen? Wenn ja welche? Zur Not machen Sie den Ansatz $(x-(a+ib))\cdot(x-(c+id)) = x^2+1$ und führen Sie anschließend einen Koeffizientenvergleich[1] durch.

c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der (reellen) quadratischen Lösungsformel[2]. Was ist, wenn man die Diskriminantenbedingung ignoriert?

Aufgabe 9 ($***$) Welche Nullstellen hat die Funktion $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix} \text{ ?}$$

Es ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; q\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gesucht. Was hat diese Aufgabe mit Aufgabe 8 zu tun?

Aufgabe 10 ($*$) (Die Formel von Moivre) Deuten Sie die Formel von Moivre

$$z^n = (rE(\varphi))^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

geometrisch. Evtl. haben Sie diese Formel in Aufgabe 5 bereits für ein paar Spezialfälle gezeigt.

Aufgabe 11 ($**$) Lösen Sie die Gleichung

$$z^2 + (2+2i)z + 3i = 0$$

mittels quadratischer Ergänzung. Was liefert die quadratische Lösungsformel im Vergleich dazu?

---

[1] Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Imagin¨arteile und Realteile gleich sind.

[2] Auch bekannt als Mitternachtsformel.

Aufgabe 12 ($**$) (n-te Einheitswurzel) Lösen Sie die Gleichung

$$z^n = 1$$

für beliebiges natürliches n! Dazu nehmen Sie am einfachsten die Formel von Moivre aus Aufgabe 10 zur Hilfe. Die Lösungen sind für $n = 1$, 2 und 3:

Gleichung:	$z = 1$	$z^2 = 1$	$z^3 = 1$	$z^4 = 1$
Lösungsmenge:	$\{1\}$	$\{-1, +1\}$	$\left\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, +1\right\}$	$\{i, -1, -i, 1\}$

Skizzieren Sie die Lösungen zu $z^n = 1$ für $n = 1$, 2, 3 und 4. Was fällt auf, wenn man die Lösungen geometrisch interpretiert?

Aufgabe 13 ($***$) (Kreisbewegungen) Wie wollen eine gleichmäßige Kreisbahn[3] beschreiben. Welche Kräfte wirken auf das kreisende Objekt? Wir wollen das untersuchen:
Jedem Punkt $\binom{a}{b}$ der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ ordnen wir die komplexe Zahl $x + iy$ zu. Bei gleichförmiger Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω und Radius r in einer Ebene ist dann der Ortsvektor $z(t) = rE(\omega t) = r\cos(\omega t) + ir\sin(\omega t)$. Zeigen Sie:

a) Die gerichtete Geschwindigkeit ist $z'(t) = \omega E(\pi/2)z(t)$ und ihr Betrag ist $|z'| = \omega|z| = \omega r$.

b) Die Beschleunigung ist $z''(t) = -\omega^2 z(t)$ mit Betrag $|z''| = \omega^2|z| = \omega^2 r$.

Dabei wird mittels $z' = x' + iy'$ die Berechnung der Ableitung über die Ableitungen von Realteil und Imaginärteil durchgeführt. Nun wissen wir also, dass die Fliehkraft durch $m|z''|$ gegeben ist, wo m die Masse des kreisenden Objekts bezeichnet.

[3]In erster N¨aherung beschreibt der Mond eine Kreisbahn um die Erde, die Erde um die Sonne und ein Radrennfahrer einen Kreis in einem Stadion.