LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen am Dienstag, den 29. Juli 2003

2. Übung: Fibonacci-Zahlen

Wiederholung: Fibonacci-Zahlen Angenommen, wir hätten ein ganz junges Paar Hasen frisch erworben. Wir haben besondere Hasen, sie werden nach einem Monat geschlechtsreif und die Häsin wirft ab ihrem zweiten Monat jeden Monat ein neues Paar Hasen, die dann wieder nach zwei Monaten Nachwuchs haben, usw. Außerdem füttern wir unsere Hasen gut und diese danken es uns und leben ewig. Wie viele Hasen gibt es dann nach einer festen Zahl Monate?
Die Lösung nennen wir Fibonacci-Zahlen nach ihrem Erfinder Leonardo Pisano (ca. 1170- ca. 1250), besser bekannt als Fibonacci. Sie sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \quad \text{(1 Paar zu Beginn)} \\ f_1 &= 1 \quad \text{(1 geschlechtsreifes Paar nach einem Monat)} \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \quad \text{(Rekursionsformel)} \end{aligned}$$

Dabei besagt die Rekursionsformel lediglich, dass es $n+1$-ten Monat alle Paare des Vormonats zuzüglich der neu geborenen Paare gibt. Neu geboren werden aber soviel Paare, wie Paare geschlechtsreif sind. Geschlechtsreif sind genau die Paare, die schon vor zwei Monaten am Leben waren, also gerade f_{n-1} Paare.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987\ldots$$

Der goldene Schnitt Der goldene Schnitt hat etwas mit den Fibonacci-Zahlen zu tun, aber was? Beginnen wir mit zwei Quadraten auf dem Papier. In der Mitte des Bildes (Abbildung 1) sieht man zwei

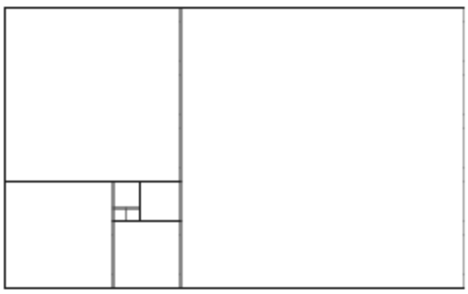

Abbildung 1: Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt

gleich große Quadrate, reihum, je anliegend an die kleineren Quadrate, wird wieder ein Quadrat angelegt. Die Seitenlängen des n-ten Quadrats ist gerade die $n+1$-te Fibonacci-Zahl! Das Verhältnis der länger Seite der Figur durch die kürzere Seite konvergiert mit zunehmender Zahl an Quadraten gegen den goldenen Schnitt.

Aufgabe 1 (Computeraufgabe) Unter http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/ss03/schuelertage/tag2.html finden Sie eine „Maple"-Datei zum herunter laden und ausprobieren. Probieren Sie die Ergebnisse verschiedener Winkel beim Pflanzenwachstum aus! Loggen Sie sich am Computer ein und starten Sie mit dem Befehl xmaple7 ...

Einfachere Fibonacci-Rätsel[1]

Aufgabe 2 ($**$) (Fibonacci-Zahlen) Ist f_{210} eigentlich gerade oder ungerade? Wie lösen Sie das, ohne die Zahl zu berechnen? Wenn Sie das gelöst haben, wissen Sie sicherlich sofort, ob f_{211} bzw. f_{212} gerade oder ungerade sind.

Aufgabe 3 ($*$) (Zwei kleine Rekursionen) Es sind die Formeln

a) $a_{n+1} = a_{n-1}$ (für natürliches $n > 1$) mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ und

b) $b_{n+1} = b_n - b_{n-1}$ (für natürliches $n > 1$) mit Startwerten $b_0 = 1$ und $b_1 = 0$

gegeben. Dadurch werden zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert.

1) Berechnen Sie a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5.

2) Finden Sie eine nicht-rekursive Formel, die a_j für beliebiges $j \in \mathbb{N}$ angibt.

3) Berechnen Sie b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5,b_6, b_7 und b_8.

4) Finden Sie eine nicht-rekursive Formel, die b_j für beliebiges $j \in \mathbb{N}$ beschreibt.

Aufgabe 4 ($**$) (Eine komplexere Folge) Wir betrachten die Rekursionsformel

$$c_{n+1} = (1+i) * c_n - i * c_{n-1}$$

für alle $n > 1$. Dabei bezeichnet i die komplexe Zahl mit $i^2 = -1$ und Polarkoordinaten $1 * E(\pi/2)$.

a) Finden Sie die Folge der c_n, wenn $c_0 = 1$ und $c_1 = i$ gelten.

b) Nun sei nichts weiter über die Startwerte bekannt. Machen Sie den Ansatz $c_n = k^n$ mit einem komplexen $k \in \mathbb{C}$. Welche Lösungen ergeben sich daraus?

c) Finden Sie die Lösung im Fall $c_0 = 2$, $c_1 = 1$.

Aufgabe 5 ($***$) (Was war doch gleich die Aufgabe?) Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0,5,-5,35,\dots)$ genügt der Rekursionsformel

$$d_{n+1} = \alpha * d_n + \beta * d_{n-1} \ ,$$

mit reellen α und β, die ich leider vergessen habe. Wer kann mir helfen und α und β berechnen? Eigentlich wollte ich ja auch wissen, wie die Folge weiter geht. Wie sieht für beliebiges $j \in \mathbb{N}$ ein geschlossener Ausdruck für d_j aus? Berechnen Sie Zahlen a, b, p und q, so dass $d_n = pa^n + qb^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 6 ($**$) (Fibonacci-Zahlen und Ziegelmuster) Wir wollen eine Ziegelmauer aus Steinen bauen, deren Länge (2 Einheiten) das Doppelte ihrer Höhe (1 Einheit) beträgt. Die Mauer soll aber nur die Unterlage eines kleinen Zauns sein, denn sie wird so hoch wie zwei flach aufeinander gelegte Ziegelsteine, also 2 Einheiten hoch. Wie hängt die Zahl der Möglichkeiten, diese Mauer zu errichten, von ihrer Breite ab? Abbildung 2, links, zeigt einige solcher Mauern.

a) Zeichnen Sie alle Möglichkeiten, eine Mauer der Breite 4 zu bauen.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Mauer der Breite 4 zu bauen? Und der Breite 5?

c) Es gibt eine rekursive Formel für die Zahl der Möglichkeiten für eine Mauer gegebener Breite n. Welches ist die Formel und warum?

[1] Die Rätsel sind von http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html entnommen.

Aufgabe 7 (∗∗) **(Ein Weg über Sechsecke)** Bild 2, rechts, zeigt eine Biene, die in ihrem Stock einen Weg beginnt. Sie kann wahlweise in Wabe 1 oder 2 starten und geht nur nach rechts (x.B. von Wabe 2 in Wabe 4 oder in Wabe 3, von Wabe 3 in Wabe 4 oder in Wabe 5. Dann gibt es genau einen Weg zu Wabe 1, zwei Wege zu Wabe 2 (über Wabe 1 oder direkt), drei Wege zu Wabe 3, usw. Die Lösung für Wabe n ist wieder eine Fibonacci-Zahl. Warum?

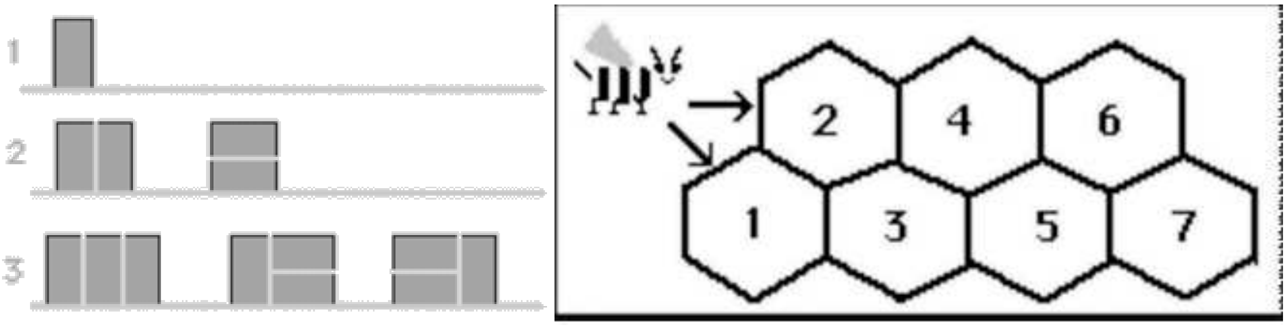

Abbildung 2: Ziegelmauern und Bienenwaben

Aufgabe 8 (∗∗) **(Lehreranimositäten)** Wir haben n Stühle in einer Reihe und einen Raum voller Leute. Es geht um eine Art „Reise nach Jerusalem“. Um zu verhindern, dass die anwesenden Lehrer die ganze Zeit nur über die Schule reden, sollen keine zwei Lehrer nebeneinander sitzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Stühle unter dieser Nebenbedingung auf n Personen aufzuteilen, also alle Stühle zu besetzten? Wir nehmen an, dass genügend Lehrer und Nicht-Lehrer anwesend sind.

Zahl der Stühle:	1	2	3	4	5	…
Zahl der Möglichkeiten:	2	3	5	8	13	…

Aufgabe 9 (∗ ∗ ∗) **(Stühle in der lehrerfreundlichen Version)** In diesem Fall sollen wieder Personen auf eine Stuhlreihe verteilt werden, diesmal allerdings sollen Lehrer mindestens einen zweiten Lehrer als Nachbarn haben, um sich nicht allein zu fühlen (z.B. auf einem Elternabend). Weiter sollen die Nicht-Lehrer (Eltern) auch jeweils mindestens einen Nicht-Lehrer auf einem der beiden Plätze neben sich haben.

a) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es bei n Stühlen, wenn ganz links immer ein Lehrer sitzt ($n \geq 2$)?

b) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es bei n Stühlen ohne die Zusatzbedingung aus a) ($n \geq 2$)? Und was hat das mit den Fibonacci-zahlen zu tun?

Aufgabe 10 (∗∗) **(Chairs in a Row: The Antisocial Version!)** Diesmal zitieren wir direkt ohne Übersetzung:
„This time we have the antisocial version which we may also perhaps call the English version! As you know, English people can be very reserved sometimes and like not to bother people by sitting next to them if they can possibly help it.
So this time we still consider rows of seats of different lengths, as before, but this time insist that no one can sit next to anyone else! There may be no one in the row, or just one person, but wherever there are two people or more, they must always be separated by at least one empty seat so that no one sits next to anyone else!“
Wie viele Möglichkeiten gibt es nun bei n Stühlen?
See Antisocial Dinner Parties by R Lewis in Fibonacci Quarterly 1995, vol 33, pages 368-370.

Aufgabe 11 ($***$) (Reflektionen, englisch) Nochmal ein Zitat:
„Pause for a little reflection.
If you look at a window of one sheet of flat, clear glass, what's on the other side is quite clear to see. But if you look through the same piece of glass when it is dark on the other side, for instance into a shop window when the shop is dark, you can see your own reflection. This time the clear glass is behaving like a mirror.
If you look very closely, you will see that your reflection is actually doubled - there are two images of your face side by side. This is because your image is not only reflected off the top surface of the glass but also gets reflected from the other side of the glass too - which is called internal reflection.
So a natural question is what happens if we have double glazing which has two sheets of glass separated by an air gap, that is, 4 reflecting surfaces? Hang on a minute ... what about three surfaces?? Let's look at that first!
For three surfaces (for example two sheets of glass resting on each other) what happens depends on whether we are looking through both sheets of glass (the rays of light come in on one side of the window but exit from the other) or whether we are looking at our own reflection from the sheets (the rays of light enter and leave from the same side of the window).
We can ignore the reflection off the top surface - the light bounces off and we get one reflection. The other cases are the interesting ones - where all the reflections are internal reflections. In other words, the light rays must have actually penetrated the glass and we can get reflections from one or perhaps both or even none of the two internal surfaces. We may even get more reflections as the light bounces off the surfaces again and again, some of the light escaping each time.
The diagram (Abbildung 3, links) here shows the possible reflections ordered by the number of internal reflections, starting with none (the light goes straight through) to a single internal reflection (from either of the internal surfaces so there are two cases) and then exactly two internal reflections and finally we have shown 3 internal reflections.
If you reflect on this, you'll notice that the Fibonacci numbers seem to be making themselves clearly visible (groan!). Why?

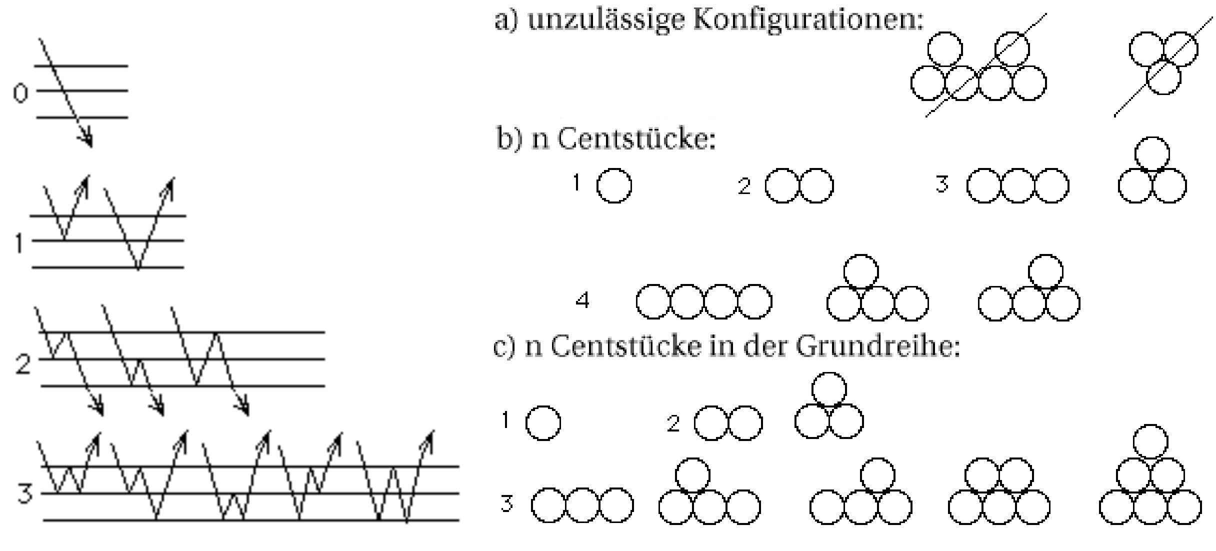

Abbildung 3: Reflektionen und Centstücke

[Advanced puzzle: What does happen with 4 reflecting surfaces in a double glazed window?]"

Aufgabe 12 (?$*$?) Viele der bislang gestellten Aufgaben ähneln sich sehr stark. Formulieren Sie ein weiteres Rätsel dieser Art, dessen Lösung eng mit den Fibonacci-Zahlen verzahnt ist.

Schwierige Fibonacci-Rätsel[2]

Aufgabe 13 ($*****$) (2 Rätsel mit Centstücken) Das eine Rätsel hat etwas mit den Fibonacci-Zahlen zu tun, das andere nicht, aber welches?

a) In beiden Fällen sollen Cents in Reihen gelegt werden. Es gibt eine unterste Reihe von Centstücken mit besonderer Bedeutung: Alle Centstücke darüber sollen 2 Centstücke der Reihe darunter berühren. Außerdem sollen alle Reihen zusammenhängend sein, also keine Lücken aufweisen. Siehe auch Abbildung 3, a).

b) Wenn es n Centstücke sind, ist die Zahl der möglichen Anordnungen dann immer eine Fibonacci-Zahl? Vergleiche Abbildung 3, b).

c) Wir zählen nun die Zahl der Möglichkeiten, wenn die unterste Reihe aus n Centstücken besteht. Man sieht schnell, dass auf jeden Fall nicht alle Fibonacci-Zahlen vorkommen. Aber es scheint sich bei dieser Folge um die alternierenden Fibonacci-Zahlen zu handeln (d.h. um die Folge $1, 2, 5, 13, \ldots$ die aus jeder zweiten Fibonacci-Zahl besteht. Stimmt das? (Vergleiche Abbildung 3, c).)

Eine der Lösungen besteht nicht nur aus Fibonacci-Zahlen. Welche?

Aufgabe 14 ($****$) (Variation zu Aufgabe 6 - Dominosteine) Ein Dominostein besteht aus 2 Quadraten, alle Dominosteine sind gleich groß. Legen Sie (Gedankenexperiment!) eine bestimmte Zahl von Dominosteinen flach auf den Tisch, alle Steine sollen mit ihrer Längsseite zueinander parallel liegen, so dass sich ein Rechteck aus dicht ohne Lücken aneinander liegenden Dominosteinen ergibt.
Beantworten Sie folgende Frage, z.B. in dem Sie eine rekursive Folge angeben, für Dominosteinrechtecke der Breite 4:
Wie viele Arten gibt es, die Steine zur selben Form zusammen zu legen, wenn sie nicht mehr unbedingt parallel zueinander liegen müssen?

Aufgabe 15 ($****$) (Wythoff's game) 1906 beschreibt W. A. Wythoff erstmalig eine Gewinnstrategie zu einem Spiel mit 2 Streichholzschachteln:
Die Spieler vereinbaren 2 Stapel von Streichhölzern. In jedem Zug darf jeder Spieler wahlweise entweder eine beliebige Menge von Streichhölzern von einem der beiden Stapel nehmen oder von beiden Stapeln je gleich viele Streichhölzer ziehen. Dann ist der andere Spieler am Zug. Gewonnen hat, wer das letzte Streichholz zieht.
So kann man z.B. auch einen gesamten Stapel auf einmal wegnehmen, dann gewinnt allerdings der Gegner, der danach den zweiten Stapel nimmt. Die Idee besteht darin, sich sichere Konfigurationen zu überlegen (unabhängig vom Zug des Gegners).

a) Finden Sie eine Gewinnstrategie!

b) Wo tauchen hier Fibonacci-Zahlen auf? (Finden Sie ein paar Beispiele!) Wenn Sie Ihrem Gegner einen Stapel der Höhe 8 und einen zweiten Stapel der gesuchten Höhe m geben, was für mögliche Wahlen für m gibt es, so dass Sie bei perfektem Spiel Ihrerseits und beliebigem Spiel des Gegners garantiert gewinnen?

[2] Entnommen von http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles2.html und …/fibpuzzles.html