LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen am Mittwoch, den 30. Juli 2003

3. Übung: Pythagoräische Tripel

Wiederholung
Unter einem *pythagoräischen Tripel* versteht man ein Tripel natürlicher Zahlen (a,b,c) mit

$$a^2+b^2=c^2 .$$

Das pythagoräische Tripel heißt *primitiv*, falls a, b und c keinen gemeinsamen Teiler haben.
Unter der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen verstehen wir im Folgenden $\{1,2,3,\ldots\}$. Mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnen wir $\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Satz 1 (Klassifizierung primitiver pythagoräischer Tripel) a) Seien m,n teilerfremde natürliche Zahlen, $m>n$ eine von ihnen gerade, die andere ungerade. Dann ist

$$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$$

ein primitives Pythagoräisches Tripel.

b) Jedes primitive pythagoräische Tripel $(a,\ b,\ c)$ mit ungeradem a ist von obiger Gestalt und diese Darstellung ist eindeutig.

Korollar 2 Zu jedem primitiven pythagoräische Tripel (a,b,c) gibt es teilerfremde natürliche Zahlen m und n mit $m>n$, so dass entweder

$$a=m^2-n^2\ ,\ b=2mn\ ,\ c=m^2+n^2 \text{ und } a \text{ ist ungerade,}$$

oder

$$a=2mn\ ,\ b=m^2-n^2\ ,\ c=m^2+n^2 \text{ und } b \text{ ist ungerade,}$$

gilt und eine der Zahlen m und n gerade, die andere ungerade ist.

Satz 3 Es seien a, b und c ganze, nicht-negative Zahlen ($\in\mathbb{N}_0$) und es sei

$$a^4+b^4=c^2$$

Dann ist $a=0$ oder $b=0$.

Aufgabe 1 (Computeraufgabe) Unter http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/ss03/schuelertage/tag3.html finden Sie alle nötigen Anweisungen.

Aufgabe 2 ($**$) Zeigen Sie: Für $n\in\mathbb{N}$ und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Fibonacci-Zahlen ist

$$(f_n f_{n+3}, 2f_{n+1}f_{n+2}, f_{n+1}^2+f_{n+2}^2)$$

ein pythagoräisches Tripel.

Aufgabe 3 ($***$) Zeigen Sie: Die Gleichungen

$$x^2+y^2=z^4$$

und

$$x^4+y^2=z^2$$

haben sehr viele Lösungen $(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$:

a) Wie gewinnen Sie Lösungen zu diesen Gleichungen aus pythagoräischen Tripeln? Satz 1 könnte hilfreich sein.

b) Wie gewinnen Sie „primitive“ Lösungen? Eine Lösung (a,b,c) heißt primitiv, wenn es im Fall $x^2+y^2=z^4$ kein $d\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ gibt mit $d|a$, $d|b$ und $d|c^2$ und es im Fall $x^4+y^2=z^2$ kein $d\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ gibt mit $d^2|a$, $d|b$ und $d|c$. Vielleicht waren die Lösungen, die Sie in Teil a) gefunden haben schon alle primitiv.

c) Zeigen Sie, dass es für beide Gleichungen unendlich viele primitive Lösungen gibt.

Aufgabe 4 ($*$)(Varianten des Satzes von Pythagoras) Ist ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $a=|C-B|$, $b=|A-C|$ und $c=|B-A|$ und einem Rechten Winkel bei C, so ist dem Satz von Pythagoras gemäß:

$$a^2+b^2=c^2\ .$$

Geometrisch heißt das, dass die Fläche des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten ist. Läßt sich das abwandeln: Zeigen Sie, ob folgende Behauptungen wahr oder falsch sind:

a) Die Fläche des Halbkreises mit Durchmesser c ist gleich der Summe der Flächen der Halbkreise mit Durchmessern a und b.

b) Die Länge des Umfangs des Halbkreises mit Durchmesser c ist gleich der Summe der Umfänge der Halbkreise mit Durchmessern a und b.

c) Das Volumen des Würfels mit Seitenlänge c ist gleich der Summe der Würfel mit Seitelängen a und b.

d) Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächen der gleichseitigen Dreiecke über den Katheten.

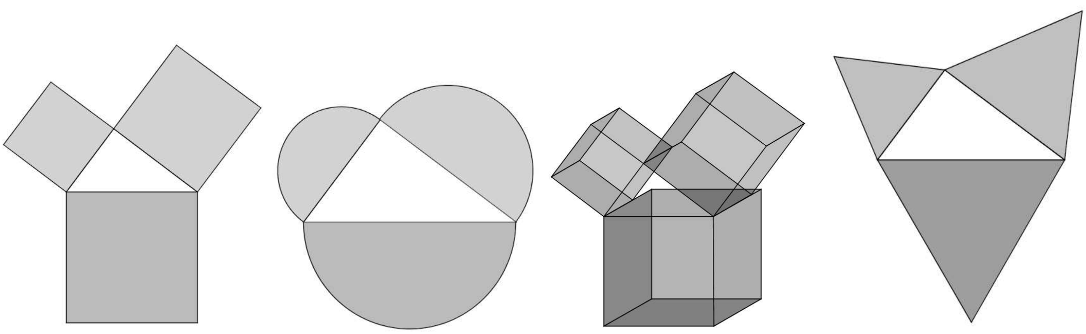

Abbildung 1: Varianten des Satzes von Pythagoras?

Aufgabe 5 ($***$) Für Tischtennisspieler, Intellektuelle, Nachtschwärmer, Individualisten und andere sympathische Menschen wie Schachspieler und Mathematiker wird eine Park entworfen. Zur Erinnerung an Pythagoras soll in einem Teil des Parks ein Beet der Form eines rechtwinkligen Dreiecks entstehen, so ähnlich wie in Abbildung 2, rechts. Die drei angrenzenden „Pythagorasquadrate“ sollen nun durch gleichgroße schwarze und weiße quadratische Steinplatten schachbrettartig so gepflastert werden, dass auf einem der Quadrate genau 64 Steinplatten liegen, dies also als Freilichtschachbrett genützt werden kann. Überlegen Sie sich, dass es im Wesentlichen genau zwei Möglichkeiten gibt, diesen Plan zu realisieren. Welche sind das?

Aufgabe 6 ($****$) Seien a und b ganze nicht-negative Zahlen, so dass a^2+b^2 und a^2-b^2 Quadratzahlen in $\mathbb{Z}$ sind. Zeigen Sie, dass $b=0$ gilt.
Hinweis: Sie können wie folgt vorgehen: Zuerst zeigen Sie, dass wenn es nicht-negative ganze Zahlen a, $b \neq 0$ mit der Eigenschaft, dass a^2+b^2 und a^2-b^2 Quadratzahlen sind, gibt, es auch ein solches Zahlenpaar mit $\mathrm{ggT}(a,b)=1$ gibt. Danach können Sie zeigen, dass b eine gerade Zahl ist. Nun schließlich nützen Sie Satz 1 oder Korollar 2 um eine Darstellung $d^2=m^4+n^4$ herzuleiten. Satz 3 liefert dann für m und n Ergebnisse, die Ihnen Rückschlüsse auf a und b erlauben.

Aufgabe 7 ($***$) Ist die Figur aus Abbildung 2, links, in der (euklidischen) Ebene $\mathbb{R}^2$ derart möglich, dass $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gelten und $a:b$, $b:c$ und $c:d$ rationale Zahlen sind?
Hinweis: Beweisen Sie z.B. zuerst, dass es, wenn es solche Zahlen a, b, c, d gibt, auch a', b', c' und d' mit den obigen Eigenschaften gibt, die zusätzlich ganze Zahlen sind. Danach verwenden Sie Aufgabe 6 um zu zeigen, dass es solche ganzen Zahlen a', b', c' und d' mit den obigen Eigenschaften gar nicht geben kann.

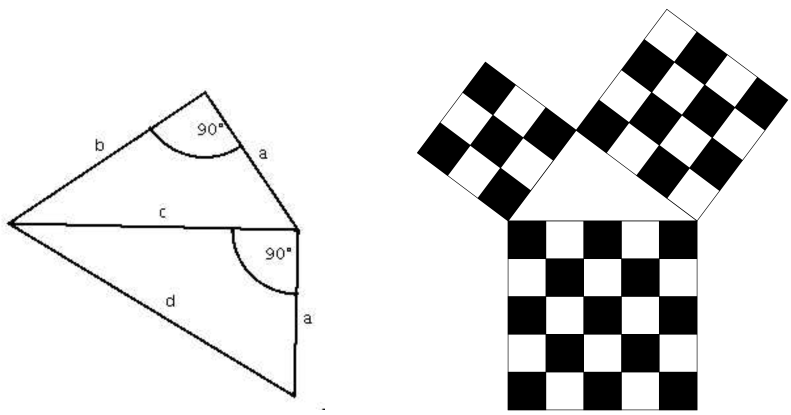

Abbildung 2: 2 Dreiecke (Aufgabe 7) und ein Park für Pythagoras (Aufgabe 5)

Aufgabe 8 ($*****$) Beweisen Sie Satz 3. Oder wurde das heute schon in der Vorlesung gemacht?

Aufgabe 9 ($***$) Sie können pythagoräische Tripel gewinnen, indem Sie wie in Abbildung 3 den Einheitskreis, dass ist der Kreis um $(0,0)$ mit Radius 1, mit der Gerade durch $(1,0)$ und $(m/n,0)$ schneiden.

a) Der eine Schnittpunkt ist (1,0), was ist der andere, in der Zeichnung mit S bezeichnete Schnittpunkt?

b) Was ergibt sich, wenn Sie den zweiten Schnittpunkt mit dem Hauptnenner seiner Koordinaten multiplizieren? Welche Beziehung fällt auf?

c) Wenn Sie wie beschrieben vorgehen, und das für alle rationalen Zahlen m/n mit $m > n$ machen, welchen Teil des Einheitskreises füllen Sie mit solchen Punkten?

d) Wie viele rationale Punkte gibt es auf dem Einheitskreis und warum?

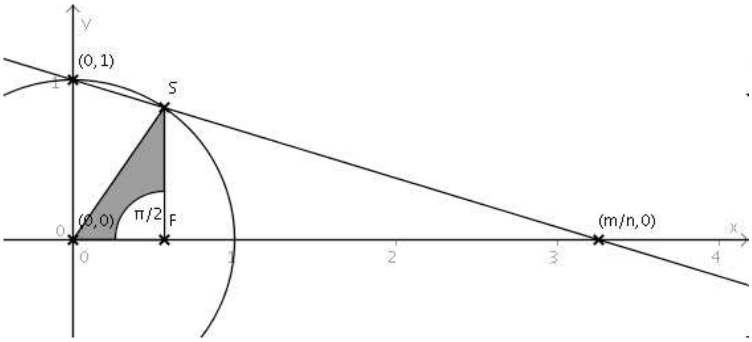

Abbildung 3: Eine Konstruktion pythagoräischer Tripel gemäß Satz 1.

Aufgabe 10 ($***$) Abbildung 4 zeigt zwei Punkte A und A', die gemäß der Konstruktion aus Aufgabe 9 zu ähnlichen Dreiecken, siehe Bild, führen. Dabei ist S' der an der Diagonale $x = y$ gespiegelte Punkt S. Setzen Sie $A = (m/n, 0)$ mit teilerfremden m, n und $m > n$.

a) Berechnen Sie S (das haben Sie evtl. schon in Aufgabe 9 gemacht) und S'.

b) Berechnen Sie $A' = (m'/n')$ aus m und n. Bei den Rechnungen kann es hilfreich sein, mit $q := m/n$ und $q' := m'/n'$ zu rechnen.

c) $m = 5$ und $n = 3$ liefern ein pythagoräisches Tripel durch Multiplikation von S mit seinem Hauptnenner. Allerdings entspricht das nicht der Vorgehensweise in Satz 1. Denn weder m noch n sind gerade. Was für eine Abhilfe gibt es dazu?

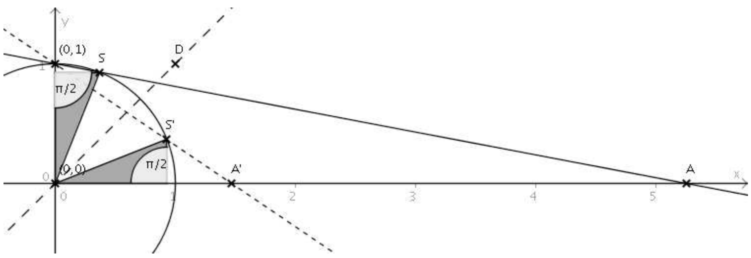

Abbildung 4: Wie man ein Tripel auf zwei Arten bekommt.