Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 05.05.2003

2. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 12.05.2003, vor der Übung)

Definition: Seien X und Y Mengen. Wir nennen

a) X und Y gleichmächtig und schreiben $X \sim Y$, falls es eine Bijektion $f : X \longrightarrow Y$ gibt.

b) Y mindestens so mächtig wie X und schreiben $X \preceq Y$, falls es eine Injektion $f : X \longrightarrow Y$ gibt.

c) Y echt mächtiger als X und schreiben $X \prec Y$, falls Y mindestens so mächtig wie X ist, X und Y aber nicht gleichmächtig sind, d.h. falls gilt: $X \preceq Y \wedge \neg (X \sim Y)$.

Aufgabe 1: Beweisen Sie den **Satz von Cantor**:
Für die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X gilt

$$X \prec \mathcal{P}(X).$$

*H*inweis: Gemäß Übung 1, A1 brauchen sie, falls $X \neq \emptyset$ ist, nur noch zu zeigen, dass $X \preceq \mathfrak{P}(X)$ gilt. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Wir definieren die Relation $R_{\mathcal{P}}$ in $\mathcal{P}(X)$ durch

$$R_{\mathcal{P}} := \{(a,b) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X);\ a \subset b\}.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften für diese Relation:

a) Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie. $\boxed{3}$

b) $\mathcal{P}(X)$ besitzt bezüglich der Relation $R_{\mathcal{P}}$ ein kleinstes Element, d. h. es gibt ein $a \in \mathcal{P}(X)$ mit $aR_{\mathcal{P}}b$ für alle $b \in \mathcal{P}(X)$. $\boxed{1}$

Bemerkung: Eine Relation in einer Menge mit den Eigenschaften aus a) nennt man eine Ordnungsrelation.

Aufgabe 3: Seien (D, S, d), (D', S', d') zwei Peano-Systeme. Beweisen Sie:

a) Es existiert genau eine Abbildung $\varphi : D \to D'$ mit

$$\varphi(d) = d', \quad \varphi(S(n)) = S'(\varphi(n)) \quad (n \in D).$$

Die Abbildung φ ist bijektiv. $\boxed{5}$

b) Seien $+$ und $\oplus$ die Additionen auf D bzw. D'. Ist φ die bijektive Abbildung von D auf D' aus Teil a), dann gilt

$$\varphi(m+n) = \varphi(n) \oplus \varphi(m) \qquad (n,\, m \in D).$$

$\boxed{3}$

c) Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für die Multiplikation. $\boxed{4}$

d) Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für die $\leq$-Relation. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Gegeben seien die Menge $M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, das Element $\mathbf{0} = (0,0) \in M$ sowie eine Abbildung $\nu : M \to M$ definiert durch

$$\nu(m,n) = \begin{cases} (m+1, n-1), & \text{falls } n \neq 0, \\ (0, m+1), & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass durch $(M, \nu, \mathbf{0})$ ein Peano-System gegeben wird. $\boxed{4}$

b) Folgern Sie aus a), dass $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind. $\boxed{2}$

Aufgabe 5: Beweisen Sie:
Ist (D, S, d) ein Modell der natürlichen Zahlen, dann gilt für k, m, $n \in D$

(i) $(m^n)(m^k) = m^{n+k}$. $\boxed{2}$

(ii) $(m^n)(k^n) = (m \cdot k)^n$. $\boxed{2}$

(iii) $(m^n)^k = m^{(n \cdot k)}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 6: Untersuchen Sie die algebraische Struktur $(\mathbb{N}_0, *)$ mit $m * n := m^n$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$. (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz von rechts- oder linksneutralem Element und Rechts- oder Linksinversen). $\boxed{5}$

$\boxed{\boxed{39}}$

Julius Wilhelm Richard Dedekind[1]

Born: 6 Oct 1831 in Braunschweig, duchy of Braunschweig (now Germany)
Died: 12 Feb 1916 in Braunschweig, duchy of Braunschweig (now Germany)

Richard Dedekind's major contribution was a redefinition of irrational numbers in terms of Dedekind cuts. He introduced the notion of an ideal which is fundamental to ring theory.
Dedekind received his doctorate from Göttingen in 1852. He was the last pupil of Gauss. After taking up a chair at the University of Zürich in 1858 he returned to his home town of Brunswick in 1862 and remained there for the rest of his life.
His major contribution was a major redefinition of irrational numbers in terms of Dedekind cuts. He published this in *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* in 1872. His analysis of the nature of number and mathematical induction, including the definition of finite and infinite sets and his work in number theory, particularly in algebraic number fields, is of major importance. In 1874 he met Cantor while on holiday in Interlaken and was sympathetic to his set theory.
Among his most notable contributions to mathematics were his editions of the collected works of Peter Dirichlet, Carl Friedrich Gauss, and Bernhard Riemann. Dedekind's study of Dirichlet's work led to his own study of algebraic number fields, as well as his introduction of ideals.
In 1879 Dedekind published *ber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen* in which he introduced the notion of an ideal which is fundamental to ring theory. Dedekind formulated his theory in the ring of integers of an algebraic number field. The general term 'ring' was introduced by Hilbert. Dedekind's notion was extended by Hilbert and Emmy Noether to allow the unique factorisation of integers into prime powers to be generalised to other rings.
Dedekind's brilliance consisted not only of the theorems and concepts that he studied but, because of his ability to formulate and express his ideas so clearly, he introduced a whole new style of mathematics that been a major influence on mathematicians ever since.

[1] Aus: The 'MacTutor History of Mathematics archive' der University of St Andrews, Scotland.