LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 19.05.2003

4. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 26.05.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Seien X, Y nicht-leere Mengen und X unendlich. Zeigen Sie:

a) Wenn eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert, so ist auch Y unendlich. $\boxed{2}$

b) Wenn eine surjektive Abbildung $g : Y \to X$ existiert, so ist auch Y unendlich. $\boxed{2}$

c) Die Umkehrung der Aussagen a) bzw. b) ist i.a. falsch. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind A, B endliche, disjunkte Mengen, dann ist $A \cup B$ ebenfalls endlich mit

$$\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B.$$

$\boxed{2}$

b) Sind A, B endliche Mengen, so ist auch deren Vereinigung eine endliche Menge. $\boxed{2}$

c) Sei M eine endliche Menge mit $\sharp M = n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist auch die Potenzmenge von M endlich, und es gilt $\sharp\mathcal{P}(M) = 2^n$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}_0$ eine Menge. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

a) M ist endlich.

b) M besitzt ein Maximum. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Beweisen Sie Satz 2.46 der Vorlesung:
Seien A, B und $M_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, abzählbare Mengen, dann gilt:

a) $A \cup B$ ist abzählbar. $\boxed{3}$

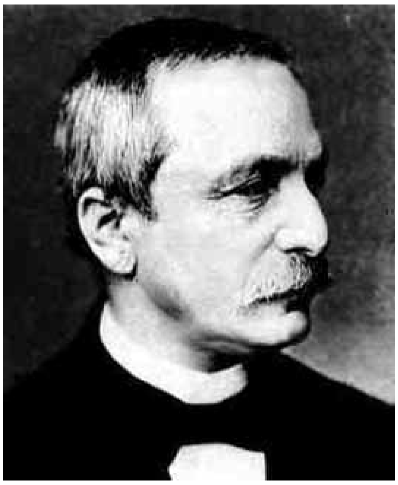
b) $A \times B$ ist abzählbar. $\boxed{2}$

c) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ ist abzählbar. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei $X := \{0, 1\}$ und $X^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen mit Elementen aus X. Zeigen Sie, dass $X^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist. $\boxed{4}$

Leopold Kronecker[1]

Born: 7 Dec 1823 in Liegnitz, Prussia (now Legnica, Poland)
Died: 29 Dec 1891 in Berlin, Germany



Kronecker's primary contributions were in the theory of equations. He made major contributions in elliptic functions and the theory of algebraic numbers.
Kronecker was taught mathematics at school by Kummer and it was due to him that Kronecker became interested in mathematics. Kronecker became a student at Berlin University in 1841 where he studied under Jacobi, Dirichlet and Eisenstein. After spending time at Bonn and Breslau he returned to Berlin to write a Ph. D. thesis on algebraic number theory under Dirichlet's supervision.
Kronecker then left Berlin and returned to Silesia where he was to make a private fortune as a banker. He remained there until 1855 when he returned to Berlin where he was to remain for the rest of his life. In 1855 Kummer came to Berlin to fill the vacancy left when Dirichlet left for Göttingen. Kronecker was not to become a professor until Kummer retired in 1883.
Kronecker was of very small stature and extremely self-conscious about his height. In fact he attacked vigorously anyone whose mathematics he disapproved.
Kronecker led the opposition to Cantor's view of set theory and the foundations of mathematics. He believed in the reduction of all mathematics to arguments involving only the integers and a finite number of steps. Kronecker is well known for his remark *God created the integers, all else is the work of man.*
Kronecker believed that mathematics should deal only with finite numbers and with a finite number of operations. The value of set theory, particularly in analysis and topology, made sure that it was accepted into mathematics despite initial opposition to the idea of the infinite.

[1]Aus: 'The MacTutor History of Mathematics archive' der University of St Andrews, Scotland.