LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 08.06.2004

7. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 15.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}};\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ und $Y := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X;\ x_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}\} \subset X$.

a) Zeigen Sie:

(i) Durch
$$\|x\| := \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \qquad (x \in Y)$$
wird eine Norm auf Y definiert. d bzw. $\mathcal{T}_d$ bezeichne die zugehörige Metrik bzw. Topologie auf $Y \times Y$ bzw. Y.

(ii) Durch $L : Y \to \mathbb{R}$ mit
$$Lx := \sum_{i\in\mathbb{N}} i\, x_i \qquad (x \in Y)$$
wird eine unstetige Linearform auf Y gegeben. $\boxed{3}$

b) Sei $\mathcal{T}_Y$ die von $(X, \mathcal{T})$ induzierte Relativtopologie auf Y. Vergleichen Sie $\mathcal{T}_Y$ mit $\mathcal{T}_d$, d.h. untersuchen Sie ob $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_d$ oder $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_Y$ gilt. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie für topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$:

a) Für $A \subset X_1$ und $B \subset X_2$ gilt: $\operatorname{int}(A \times B) = (\operatorname{int} A) \times (\operatorname{int} B)$. $\boxed{2}$

b) Für $A_i \subset X_i$, $i \in I$ gilt: $\prod_{i\in I}(\operatorname{int} A_i) \supset \operatorname{int}(\prod_{i\in I} A_i)$. $\boxed{1}$

c) In b) gilt i.A. nicht Gleichheit. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ seien Äquivalenzrelationen R_1, R_2 definiert durch

(i) $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in R_1 :\Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$,

(ii) $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in R_2 :\Longleftrightarrow (x_1 = y_1 = 0 \wedge x_2 = y_2) \vee x_1 = y_1 \neq 0$.

Sei $X_j := \mathbb{R}^2/R_j$ jeweils mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_{R_j}$ versehen.

a) Zu welchem bekannten topologischen Raum ist X_1 homöomorph? $\boxed{2}$

b) Bestimmen Sie X_2 und zeigen Sie, dass es $[x],\ [y] \in X_2$ mit $[x] \neq [y]$ und $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}([x])$ und alle $V \in \mathcal{U}([y])$ gibt. $\boxed{2}$

Aufgabe 4*: Auf dem topologischen Unterraum $\underline{X} := \underline{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$ von $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_{nat})$ sei R die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Die Äquivalenzklassen sind also genau die Geraden durch 0 ohne den Nullpunkt. Sei $\underline{X/R}$ der Quotientenraum und $\underline{\mathbb{R}^2} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to X/R, \quad (x_1, x_2) \mapsto [(x_1, x_2, 1)]_R$$

injektiv, stetig und offen ist. Man nennt $\mathbb{P}^2 := X/R$ die **projektive Ebene**. $\boxed{6}$

Aufgabe 5: Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und auf $\mathbb{R}^2$ sei die Äquivalenzrelation R definiert durch

$$(x, y) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad x = y \vee x = Ay \qquad (x, y \in \mathbb{R}^2).$$

a) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2/R$ auf die Menge der ungeordneten Paare $\{x_1, x_2\}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gibt. $\boxed{1}$

b) Sei $Q := \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x_2\}$ mit der Relativtopologie von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ und $\mathbb{R}^2/R$ mit der Quotiententopologie bezüglich $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ versehen. Zeigen Sie:

$$f : Q \to \mathbb{R}^2/R, \quad x \mapsto f(x) := [x]_R$$

ist ein Homöomorphismus. $\boxed{3}$